

MTS 301 A

Eléments de traitement numérique du signal

C6 Synthèse des filtres : filtres récurrents

Plan

- **Rappel : synthèse des filtres**
 - Caractérisation des filtres discrets
 - Filtres récurrents
- **Synthèse des filtres récurrents : méthode de l'invariance impulsionnelle**
 - Principe
 - Relation entre Transformée de Laplace et Transformée en z
 - Filtres à réponse impulsionnelle réelle
- **Synthèse des filtres récurrents : méthode de la transformation bilinéaire**
 - Principe
 - Réponse fréquentielle
 - Exemple

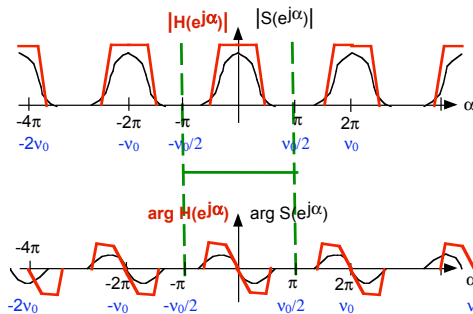
1

2

Synthèse des filtres

- **Caractérisation des filtres discrets**

$$\checkmark S(e^{j2\pi\omega T_0}) = E(e^{j2\pi\omega T_0}) \cdot H(e^{j2\pi\omega T_0}) \text{ ou } S(e^{j\alpha}) = E(e^{j\alpha}) \cdot H(e^{j\alpha})$$



Caractérisation fréquentielle sur $[-\pi, \pi]$ ou sur $[-v_0/2, v_0/2]$

3

Synthèse des filtres

- **Synthèse : principe**

- Connaissant les caractéristiques du filtre cherché ($H(e^{j2\pi\omega T_0})$), déterminer $H(z)$ et en déduire l'équation de filtrage connaissant.

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j z^{-j}} \Rightarrow s(k) = \sum_{i=0}^N a_i e^{(k-i)} - \sum_{j=1}^M b_j s(k-j)$$

Filtres récurrents (causaux) : au moins un coefficient b_j est différent de 0.

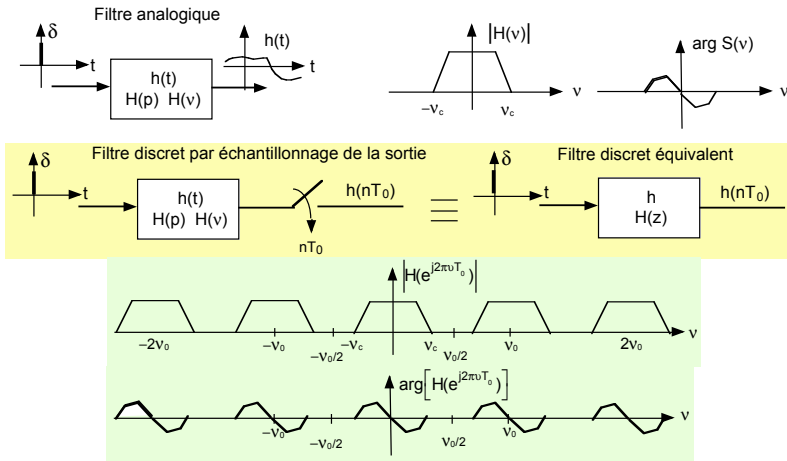
Leur réponse impulsionnelle est infinie : filtres à réponse impulsionnelle infinie (filtres IIR, ou FIR filters)

4

Synthèse des filtres RII

Méthode de l'invariance impulsionnelle(1)

Principe

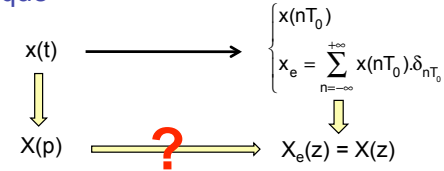


5

Synthèse des filtres RII

Relation entre Transformées de Laplace et en z

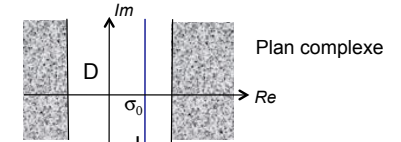
Problématique



Détermination (1)

$$X(p) = \int_D x(t)e^{-pt} dt \quad p \in D$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_L X(p)e^{pt} dp \quad \begin{cases} L : p = \sigma_0 + j\omega \\ \sigma_0 \in D \end{cases}$$



6

Synthèse des filtres RII

Relation entre Transformées de Laplace et en z

Détermination (2)

$$d'où \quad x(nT_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(p)e^{pnT_0} dp \quad \Longrightarrow \quad TZ[x_e(t)] = X(z) = X_e(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_0)z^{-n}$$

Cas particulier des systèmes causaux

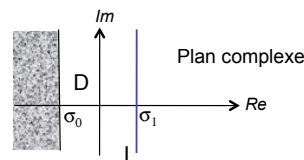
$X(p)$ est holomorphe pour D tel que $\begin{cases} p = \sigma + j\omega \\ \text{avec } \sigma > \sigma_0 \end{cases}$

On détermine $x(nT_0)$ sur L :

$$x(nT_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} X(p)e^{pnT_0} dp, \quad \sigma_1 > \sigma_0$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_0)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} X(p)e^{pnT_0} dp \right] z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} X(p) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (e^{pT_0} z^{-1})^n \right] dp$$



7

Synthèse des filtres RII

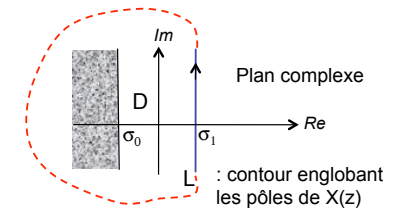
Relation entre Transformées de Laplace et en z

Détermination (3) : Cas particulier des systèmes causaux

Pour l'intégration sur L , la série $\sum_{n=0}^{\infty} (e^{pT_0} z^{-1})^n$ converge pour $|z| > |e^{pT_0}| = e^{\sigma_1 T_0}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{pT_0} z^{-1})^n = F(z) = \frac{1}{1 - e^{pT_0} z^{-1}}$$

$$d'où \quad \begin{cases} X(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{pT_0} z^{-1}} dp \\ |z| > e^{\sigma_1 T_0} \end{cases}$$



En utilisant le théorème des résidus sur le contour L , qui englobe tous les pôles de $X(z)$:

$$X(z) = \sum_{\text{pôles de } X(p)} \text{Res} \left[X(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{pT_0} z^{-1}} \right]$$

8

Synthèse des filtres RII

Méthode de l'invariance impulsionnelle (2)

Méthode

- Définition du gabarit de filtrage cherché pour le filtre discret
- Recherche du filtre analogique $H(p)$ ayant ce gabarit

$$H(p) \xrightarrow{\text{yellow arrow}} H(z) = \sum_{\text{pôles de } H(p)} \text{Res} \left[H(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{pT_0} z^{-1}} \right] = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}$$

D'où l'équation de filtrage :

$$s(k) = \sum_{i=0}^N a_i e(k-i) - \sum_{j=1}^M b_j s(k-j)$$

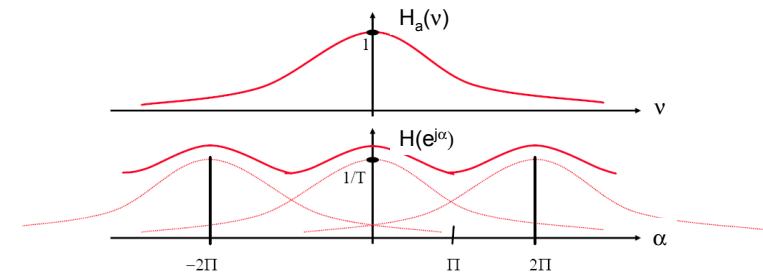
Limites : risque de repliement de spectre !

9

Synthèse des filtres RII

Méthode de l'invariance impulsionnelle (3)

Exemple



10

Synthèse des filtres RII

Méthode de la Transformation Bilinéaire

- Voir polycopié

11