

Département Image et  
Traitement de l'Information  
ENST de Bretagne

---

Eléments de traitement  
numérique du signal

---

Chafiaâ Hamitouche-Djabou

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Echantillonnage d'un signal à temps continu</b>	<b>5</b>
1.1	Théorème d'échantillonnage . . . . .	5
1.1.1	Echantillonnage idéal . . . . .	5
1.1.2	Reconstruction de $s(t)$ à partir de $s_\epsilon(t)$ : Théorème de SHANNON	7
1.2	Limites du théorème d'échantillonnage . . . . .	9
1.2.1	Filtres antirepliement . . . . .	9
1.2.2	Echantillonneur moyennneur . . . . .	10
1.2.3	Echantillonneur bloqueur . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Signaux et systèmes discrets</b>	<b>13</b>
2.1	Signaux discrets . . . . .	13
2.1.1	Classification des signaux déterministes . . . . .	13
2.1.2	Représentation des signaux discrets . . . . .	14
2.2	Systèmes linéaires stationnaires continus discrets (ou filtres) . . . . .	15
2.2.1	Définition - Représentation par une fonction . . . . .	15
2.2.2	Représentation dans l'espace des distributions . . . . .	15
2.2.3	Conséquence . . . . .	16
2.3	Produit de convolution discret . . . . .	17
2.3.1	Réponse à l'impulsion unité (ou de Dirac) . . . . .	17
2.3.2	Réponse à une entrée quelconque . . . . .	17
2.3.3	Filtre causal - Produit de corrélation . . . . .	19
2.3.4	Equation de filtrage . . . . .	20
2.3.5	Filtres récurrents et non récurrents . . . . .	20
2.4	Stabilité des filtres discrets . . . . .	21
<b>3</b>	<b>La transformation en z</b>	<b>22</b>
3.1	Définition . . . . .	22
3.1.1	Transformée de Laplace d'une suite discrète . . . . .	22
3.1.2	Transformée en z . . . . .	22
3.1.3	Transformée de Fourier d'une suite discrète . . . . .	23
3.1.4	Propriétés de la Transformée de Fourier d'un signal discret . . . . .	23
3.1.5	Réponse fréquentielle d'un filtre discret . . . . .	24
3.2	Réponse à une entrée quelconque . . . . .	26
3.2.1	Intérêt de la transformation en z . . . . .	26
3.2.2	Transformée en z de l'équation récurrente de filtrage . . . . .	27

3.3	Propriétés de la transformation en $z$ . . . . .	27
3.3.1	Transformée monolatérale . . . . .	27
3.3.2	Convergence de la transformée en $z$ . . . . .	28
3.3.3	Stabilité d'un filtre causal . . . . .	29
3.4	Transformation inverse . . . . .	30
3.4.1	Rappel . . . . .	30
3.4.2	Application . . . . .	31
3.4.3	Autre formulation à l'aide des résidus . . . . .	32
3.4.4	Formules . . . . .	32
3.4.5	Division polynômiale . . . . .	32
3.4.6	Développement en série . . . . .	33
3.5	Transformée en $z$ d'un produit . . . . .	33
3.5.1	Détermination . . . . .	33
3.5.2	Puissance d'un signal discret - Théorème de Parseval . . . . .	34
3.6	Transformées usuelles . . . . .	35
3.7	Exemple : filtre récursif du premier ordre . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Relations entre signaux continus et signaux échantillonnés</b>	<b>38</b>
4.1	Relations entre transformée en $z$ et transformée de Laplace . . . . .	38
4.1.1	Première relation . . . . .	38
4.1.2	Deuxième relation . . . . .	38
4.2	Mise en cascade de systèmes échantillonnés . . . . .	40
4.2.1	Fonction de transfert en $z$ d'un système échantillonné . . . . .	40
4.2.2	Application : mise en cascade . . . . .	42
4.3	Reconstruction d'un signal continu . . . . .	42
4.3.1	Bloqueur d'ordre 0 . . . . .	42
4.3.2	Utilisation . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Structure des filtres discrets</b>	<b>45</b>
5.1	Structure directe . . . . .	45
5.1.1	Rappel . . . . .	45
5.1.2	Structure de filtre récursif . . . . .	46
5.1.3	Structure de filtre non récursif . . . . .	47
5.2	Structure canonique . . . . .	47
5.3	Autres structures . . . . .	49
5.3.1	Structure cascade . . . . .	49
5.3.2	Structure parallèle . . . . .	49
<b>6</b>	<b>La transformation de Fourier discrète et les algorithmes rapides pour son calcul</b>	<b>51</b>
6.1	Introduction . . . . .	51
6.2	Transformation de Fourier discrète d'un signal discret périodique . . . . .	51
6.2.1	Définition . . . . .	52
6.2.2	Reconstruction de $\tilde{x}(n)$ . . . . .	52
6.2.3	Relation avec la transformation de Fourier . . . . .	53

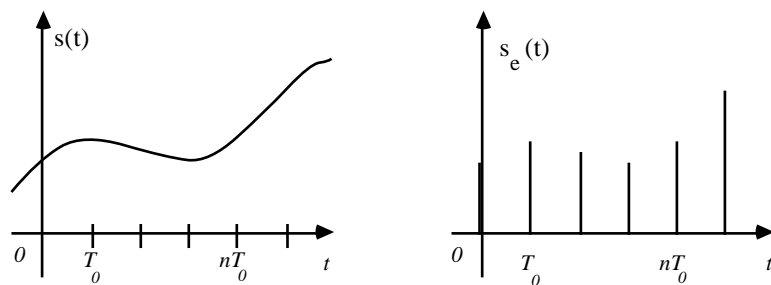
6.2.4	Relation avec la transformation en $z$ . . . . .	53
6.2.5	Propriétés . . . . .	54
6.2.6	Filtrage . . . . .	54
6.3	Transformation de Fourier discrète d'un signal de durée finie . . . . .	54
6.4	Transformation de Fourier discrète d'un signal de durée infinie . . . . .	55
6.4.1	Les fenêtres de pondération classiques . . . . .	55
6.4.2	Compromis Largeur du lobe principal-Atténuation des oscillations . . . . .	56
6.4.3	Représentation spectrale des différentes fenêtres . . . . .	57
6.5	Choix de la durée $N$ . . . . .	57
6.6	TFD et convolution . . . . .	59
6.6.1	Convolution de deux signaux de durée finie . . . . .	59
6.6.2	Produit de convolution circulaire . . . . .	60
6.6.3	Théorème de Parseval . . . . .	62
6.7	Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT) . . . . .	62
6.7.1	Principe . . . . .	63
6.7.2	Dédoublment en temps . . . . .	64
6.7.3	Dédoublment en fréquence . . . . .	65
6.7.4	Calcul de la transformée inverse . . . . .	68
6.7.5	Autres algorithmes . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Synthèse de filtres récurifs</b> . . . . .	<b>69</b>
7.1	Principe . . . . .	69
7.2	Méthode de l'invariance impulsionnelle . . . . .	70
7.2.1	Principe . . . . .	70
7.2.2	Limites de la méthode . . . . .	71
7.3	Synthèse par la transformation bilinéaire . . . . .	72
7.3.1	Introduction . . . . .	72
7.3.2	Réponse en fréquence . . . . .	73
7.3.3	Intérêts de la transformation bilinéaire . . . . .	75
7.4	Synthèse par une méthode d'optimisation . . . . .	77
<b>8</b>	<b>Synthèse des filtres non récurifs</b> . . . . .	<b>79</b>
8.1	Méthode de la fenêtre . . . . .	79
8.1.1	Méthode . . . . .	79
8.1.2	Exemple . . . . .	81
8.2	Synthèse de filtres à phase linéaire . . . . .	81
8.2.1	Définition - Intérêt . . . . .	81
8.2.2	Filtres à phase nulle . . . . .	82
8.2.3	Application à la détermination d'un filtre causal à phase linéaire . . . . .	83
8.2.4	Relation entre la réponse impulsionnelle et filtrage réalisé . . . . .	84
8.3	Application de la TFD à la synthèse de filtres non récurifs . . . . .	87
8.3.1	Méthode de l'échantillonnage en fréquence . . . . .	87
8.3.2	Cas particulier : filtre réel . . . . .	88
8.4	Comparaison entre filtres RIF-RII . . . . .	89

# Chapitre 1

## Echantillonnage d'un signal à temps continu

### 1.1 Théorème d'échantillonnage

#### 1.1.1 Echantillonnage idéal



**Fig. 1.** échantillonnage d'un signal

Le signal échantillonné est défini par :

$$s_e(t) = \begin{cases} s(nT_0) & t = nT_0 \\ 0 & t \neq nT_0 \end{cases}$$

Il est représenté :

- par la fonction

$$s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0) \delta(t - nT_0)$$

- ou par la distribution

$$s_e = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0) \delta_{nT_0}$$

Il peut encore s'écrire :

$$s_e = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) \delta_{nT_0} = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT_0}$$

- la transformée de Fourier de  $s_e$  est la distribution  $S_e$  définie par la fonction  $S_e(\nu)$  telle que :

$$S_e(\nu) = F \left[ s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT_0} \right] = S(\nu) * \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{n\nu_0}$$

avec  $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$  ;  $S_e(\nu)$  est appelée transformée de Fourier de  $s_e(t)$  (au sens des fonctions). On peut encore écrire :

$$S_e(\nu) = F \left[ s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT_0} \right] = S(\nu) * \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{n\nu_0}$$

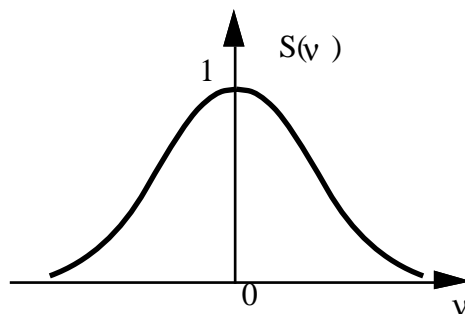
$$S_e(\nu) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\nu - n\nu_0)$$

- d'autre part :

$$\begin{aligned} S_e(\nu) = F[s_e] &= \langle s_e, e^{-j2\pi\nu t} \rangle \\ &= \left\langle \sum_n s(nT_0) \delta_{nT_0}, e^{-j2\pi\nu t} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_e(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0) e^{-j2\pi\nu T_0}$$

*Illustration* : cas d'un signal continu dont la transformée de Fourier est réelle.



**Fig. 2.** spectre du signal continu

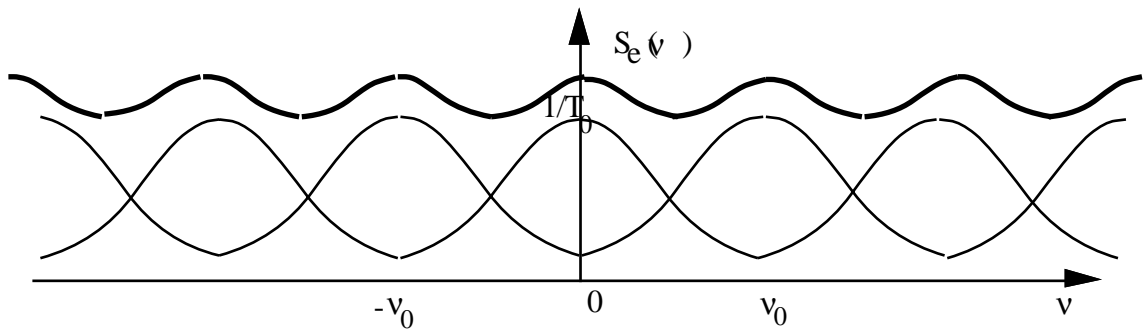


Fig. 3. spectre du signal discret

Le spectre d'un signal échantillonné est assez éloigné du spectre du signal continu dans le cas général: l'échantillonnage provoque une déformation du spectre appelé repliement (aliasing).

### 1.1.2 Reconstruction de $s(t)$ à partir de $s_e(t)$ : Théorème de SHANNON

Il existe un cas où il est possible de reconstruire  $s(t)$  à partir de  $s_e(t)$  : si  $S(n)$  a un support limité à  $[-\nu_M, +\nu_M]$  avec  $\nu_M \leq \frac{\nu_0}{2}$ , le repliement n'entraîne pas de déformation du spectre continu, mais seulement une périodisation :

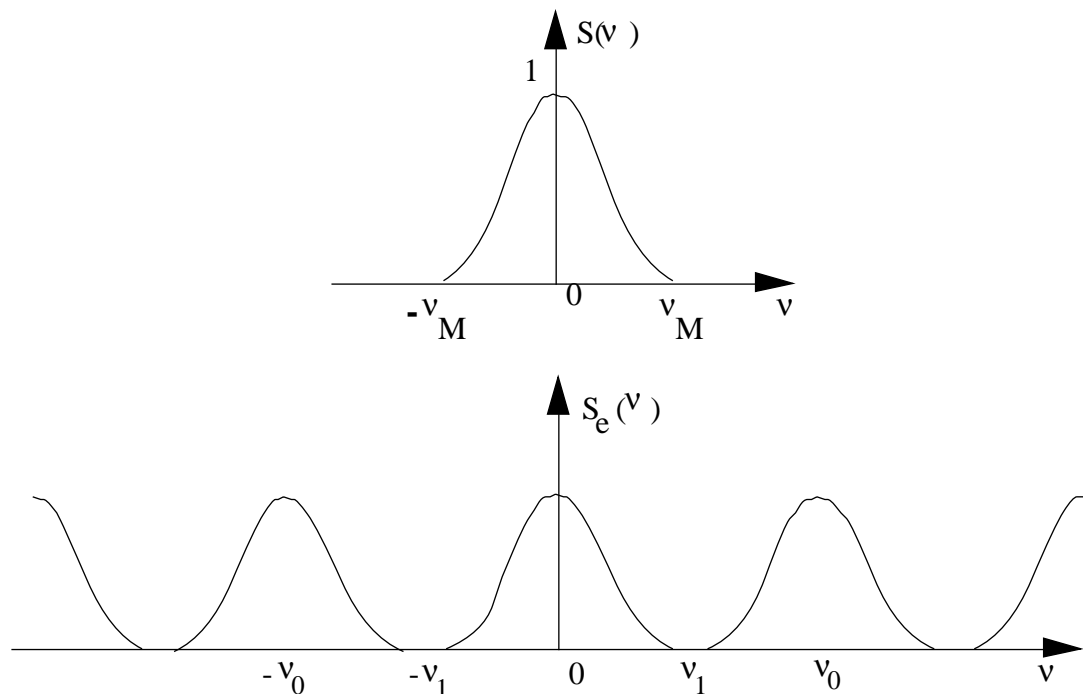


Fig. 2.

Pour obtenir  $s(t)$  à partir de  $s_e(t)$ , on filtre  $s_e(t)$  par un filtre passe-bas idéal de gain  $C(\nu)$  :

$$C(\nu) = \begin{cases} T_0 & \text{si } |\nu| \leq \nu_1 \\ 0 & \text{si } |\nu| \geq \nu_1 \end{cases} \quad S(\nu) = C(\nu) \cdot S_e(\nu)$$

or

$$TF^{-1}[C(\nu)] = c(t) = \left(\frac{T_0}{\pi t}\right) \sin(2\pi\nu_1 t)$$

Soient  $c$  la distribution définie par  $c(t)$ ;  $s$  la distribution définie par  $s(t)$ . On a alors :  
 $TF^{-1}[S_e \cdot C] = s_e \star c$

$$s = \sum_n s(nT_0) \delta_{nT_0} * c = \sum_n s(nT_0) \cdot \tau_{nT_0} [c]$$

où  $\tau_{nT_0} [c]$  est défini par la fonction  $c(t - nT_0)$ . Il vient donc

$$s(t) = \frac{T_0}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0) \frac{\sin 2\pi\nu_1 (t-nT_0)}{t-nT_0}$$

et en prenant  $\nu_1 = \frac{\nu_0}{2} = \frac{1}{2T_0}$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_0}(t-nT_0)\right)}{\frac{\pi}{T_0}(t-nT_0)}$$

Cette expression permet de reconstruire exactement  $s(t)$  à partir des échantillons :  
c'est une interpolation idéale.

Cette formule est intéressante à double titre :

- elle se met sous la forme :

$$s(t) = \sum_k C_k \phi_k(t)$$

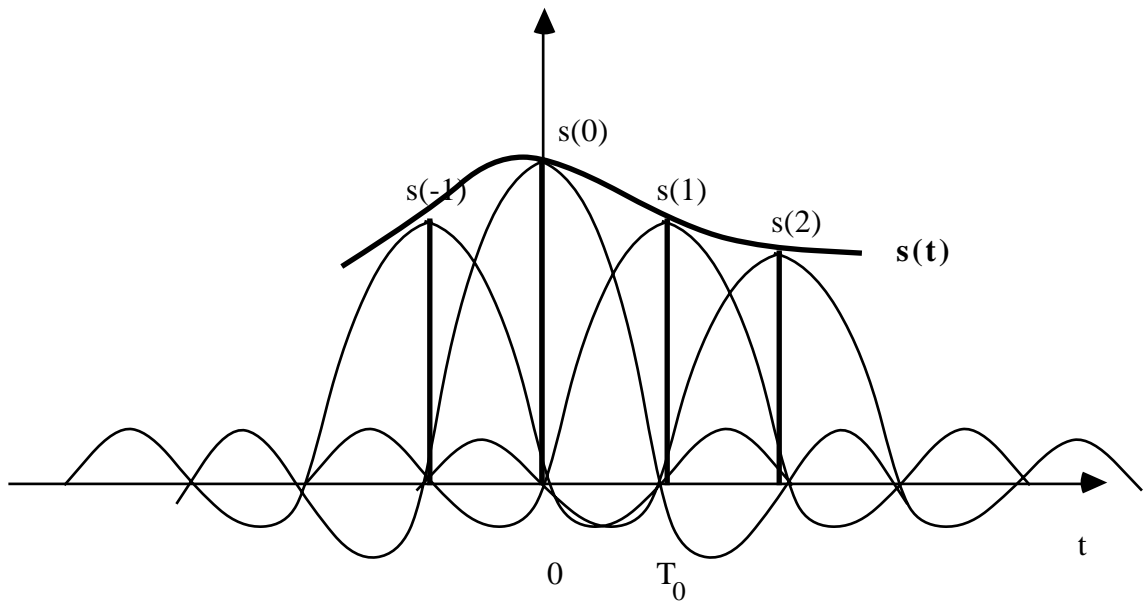
Il s'agit donc de la décomposition du signal continu  $s(t)$  sur une base (de dimension infinie)  $\phi_k(t)$ , les  $C_k$  étant les coordonnées du signal dans l'espace engendré par cette base.

- les coefficients de cette décomposition sont de plus, dans ce cas, les échantillons du signal  $s(t)$ .

Il existe d'autres décompositions de signaux (par exemple, pour un signal périodique, le développement en série de Fourier) pour lesquelles les coefficients de la décomposition sont des scalaires qui ne sont pas les échantillons du signal.

Illustration :





**Fig. 3.** Reconstruction de  $s(t)$  à partir de  $s_e(t)$

Le résultat obtenu peut être énoncé d'une autre manière:

### **Théorème de Shannon**

Un signal continu  $s(t)$  à spectre borné  $[-\nu_M, \nu_M]$  est entièrement connu par une suite infinie d'échantillons  $s(nT_1)$  de  $s(t)$  si la période d'échantillonnage  $T_1$  est inférieure ou égale à  $T_0 = \frac{1}{2\nu_M}$

#### Interprétation physique

L'échantillonnage idéal à la fréquence  $2\nu_M$  permet de prendre en compte toutes les fréquences présentes dans le spectre du signal continu, c'est-à-dire toutes les variations temporelles et donc de ne perdre aucune information.

## **1.2 Limites du théorème d'échantillonnage**

### **1.2.1 Filtres antirepliement**

Dans le cas où le spectre du signal à échantillonner n'est pas connu ou alors la fréquence d'échantillonnage est imposée, un préfiltrage du signal continu avant échantillonnage est indispensable. Il s'agit du filtrage anti-repliement ou *anti-aliasing* qui n'est autre qu'un filtrage passe-bas.

## 1.2.2 Echantillonneur moyenneur

Il s'agit là d'effectuer un échantillonnage à l'aide d'une fenêtre analogique, s'ouvrant un court instant  $\tau$  et laissant passer (mémoriser) la partie du signal  $s(t)$  correspondant à cette durée.

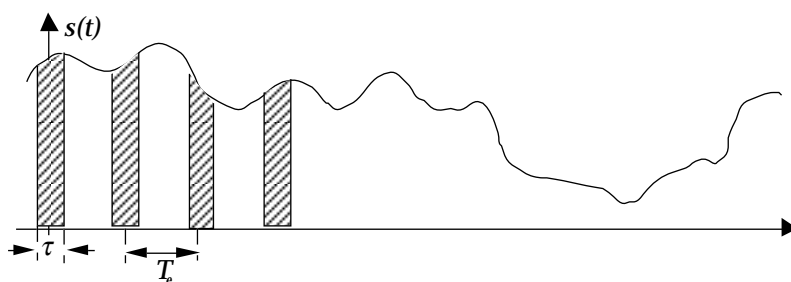


Fig. 4. Echantillonneur moyenneur

La valeur de l'échantillon  $s(kT_e)$  est obtenue en prenant la moyenne du signal sur la durée  $\tau$ .

$$s(kT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{kT_e - \frac{\tau}{2}}^{kT_e + \frac{\tau}{2}} s(t) dt$$

Essayons maintenant d'étudier l'allure du spectre.

$$s_{em}(t) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{\tau}(t - kT_e)$$

avec :  $p_{\tau}(t)$  fenêtre rectangulaire de durée  $\tau$ .

$$s_{em}(t) = s(t) \cdot \left[ p_{\tau}(t) \star \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{kT_e} \right]$$

$$S_{em}(\nu) = S(\nu) \star \left[ P_{\tau}(\nu) \cdot \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{k\nu_e} \right]$$

avec :  $P_{\tau}(\nu) = \tau \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$

$$S_{em}(\nu) = \frac{1}{T_e} \cdot S(\nu) \star \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_{\tau}(k\nu_e) \delta_{k\nu_e}$$

$$= \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_{\tau}(k\nu_e) S(\nu - k\nu_e)$$

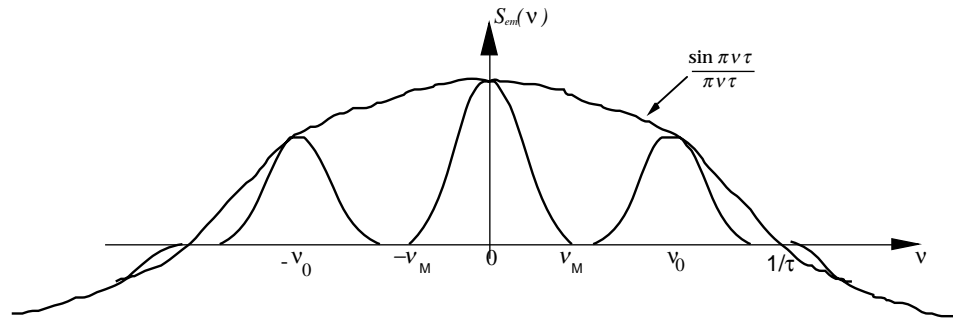


Fig. 5. Spectre du signal échantillonné par un échantillonneur moyennneur

### 1.2.3 Echantillonneur bloqueur

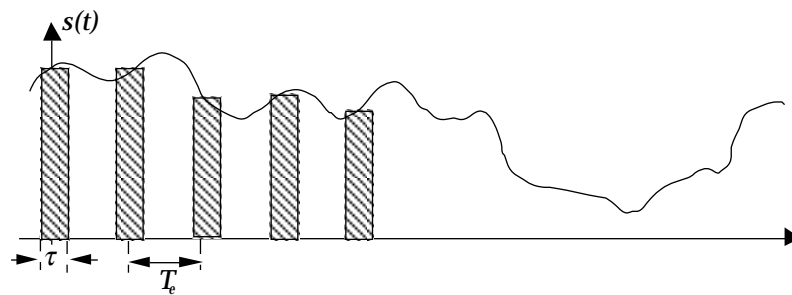


Fig. 6. Echantillonneur bloqueur

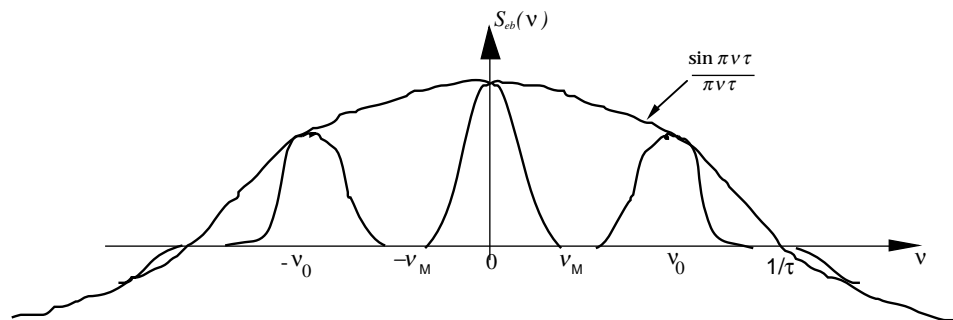
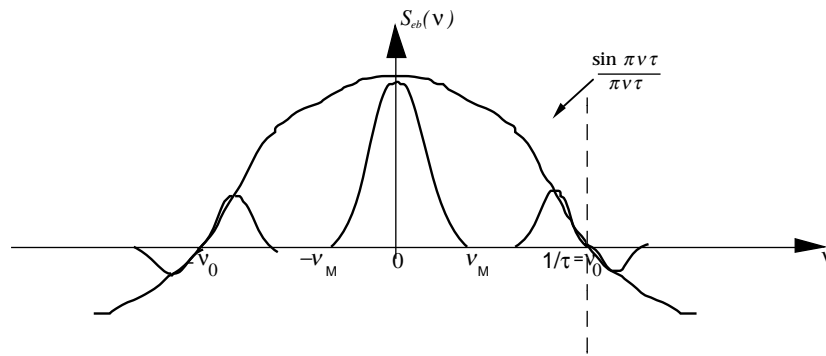


Fig. 7. Spectre du signal échantillonné par un échantillonneur bloqueur

#### Bloqueur d'ordre 0 (interpolateur)

Il correspond au cas où  $\tau = T_e$ , ou alors  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_e} = \nu_e$  le spectre du signal échantillonné est alors :



**Fig. 8.** Spectre du signal échantillonné par un échantillonneur bloqueur

# Chapitre 2

## Signaux et systèmes discrets

### 2.1 Signaux discrets

#### 2.1.1 Classification des signaux déterministes

On classe habituellement ces signaux en deux catégories :

- les signaux à temps continu : le signal est présent de manière continue par rapport au temps
- les signaux à temps discret : le signal n'est présent que pour des valeurs discrètes du temps ( $t = t_i, i \in \mathbb{Z}$ ).

Lorsque les signaux prennent leurs valeurs dans un ensemble continu, on parlera de signaux à valeur continue. Dans le cas contraire, on parlera de signaux à valeurs discrètes ou quantifiées (le signal à l'instant  $t$  a une valeur numérique).

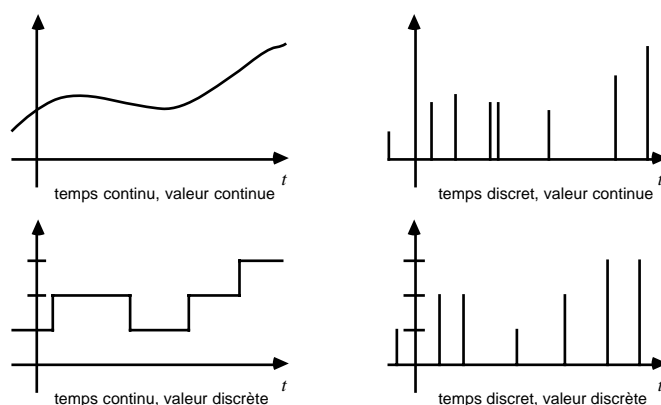


Fig. 9.

Dans la suite du cours, nous appellerons signal discret, un signal à temps discret et à valeur continue, par opposition aux signaux numériques, signaux à temps discret et à valeurs discrètes.

Il faut remarquer que dans la plupart des cas, on associe au signal discret un signal numérique afin de pouvoir l'analyser, le traiter sur un ordinateur numérique. Cette opération s'effectue à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique.

De fait, on réalise cette opération systématiquement lorsque l'on mesure un phénomène physique : on associe une suite de valeurs numériques à un phénomène a priori continu.

Exemple de signal discret : signal échantillonné :

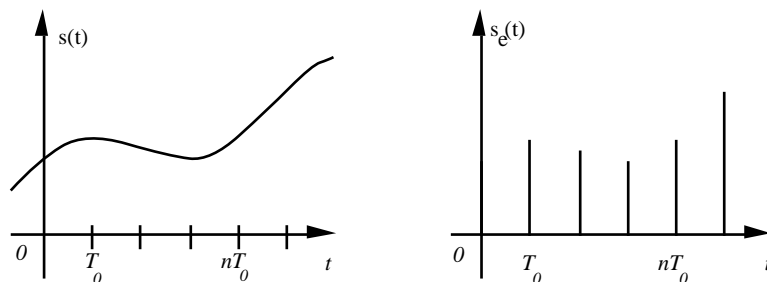


Fig. 10.

## 2.1.2 Représentation des signaux discrets

Nous n'étudierons que des signaux discrets existants à des "instants" tels que  $t_k = kT_0; k \in \mathbb{Z}, T_0 \in \mathbb{R}^+$  ( $t$  peut représenter une autre grandeur que le temps).

Pour  $T_0 = 1s, t_k = k$ , ce qui nous amène à considérer également des suites de valeurs, par exemple des suites de valeurs numériques  $s(n), n \in \mathbb{Z}$ , sans aucun rapport avec le temps, ni aucune autre grandeur physique.

Un signal discret est défini par :

$$s(t) = \begin{cases} s(k) & [\text{ou } s(kT_0)] & \text{si } t = k & [\text{ou } t = kT_0] \\ 0 & & \text{si } t \neq k & [\text{ou } t \neq kT_0] \end{cases}$$

- représentation par une suite :

Il s'agit simplement d'une réécriture de la définition sous la forme :

$$\{s(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (\text{ou } \{s(kT_0)\}_{k \in \mathbb{Z}})$$

- représentation à l'aide des distributions :

$$s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \delta_n \quad \left( \text{ou } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0) \delta_{nT_0} \right)$$

- représentation à l'aide de fonctions :

On introduit la "fonction" de Dirac  $\delta(x)$  ; le signal est alors représenté par la fonction  $s(n)$  définie par :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k) \delta(n - k)$$

## 2.2 Systèmes linéaires stationnaires continus discrets (ou filtres)

### 2.2.1 Définition - Représentation par une fonction

Les systèmes *discrets* sont des systèmes dont l'entrée et la sortie sont des signaux discrets:

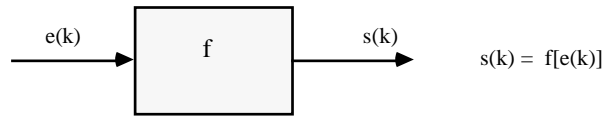


Fig. 11.

- linéarité :

$$f[e_1(k)] = s_1(k) \quad f[e_2(k)] = s_2(k) \Rightarrow f[\lambda_1 e_1(k) + \lambda_2 e_2(k)] = \lambda_1 s_1(k) + \lambda_2 s_2(k);$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2$$

- stationnarité :

$$\text{Si } s_1(k) = f[e_1(k)] \quad \text{alors } s_1(k-n) = f[e_1(k-n)] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- continuité :

$$\text{Soit } e(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(k) \quad \forall k$$

$$\text{le système est continu si : } s(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(k) \quad \forall k$$

$$\text{avec : } s(k) = f[e(k)]; \quad s_n(k) = f[e_n(k)]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f[e_n(k)] = f\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(k)\right]$$

Un système discret linéaire, stationnaire et continu est appelé un *filtre discret*.

### 2.2.2 Représentation dans l'espace des distributions

$$e = \sum_k e(k) \delta_k \quad ; \quad s = \sum_k s(k) \delta_k = \sum_k f[e(k)] \delta_k$$

Le système est représenté par l'application  $F$  telle que :

$$F(e) = s = \sum_k f[e(k)] \delta_k$$

- F est linéaire :

$$F(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = \sum_k f[\lambda_1 e_1(k) + \lambda_2 e_2(k)] \delta_k = \lambda_1 F(e_1) + \lambda_2 F(e_2)$$

- F est permutable avec les translations :

$$\tau_n(e) = \sum_k e(k-n) \delta_k$$

$$F[\tau_n(e)] = \sum_k f[e(k-n)] \delta_k = \sum_k s(k-n) \delta_k = \tau_n(s) \quad \Rightarrow \quad F[\tau_n(e)] = \tau_n[F(e)]$$

- F est continue au sens des distributions :

Soient :

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n; \quad s = F(e); \quad s_n = F(e_n)$$

nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[e_n(k)] = f\left[\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(k)\right] = f[e(k)] = s(k) \quad \forall \varphi \text{ à support compact,}$$

$$\langle F(e_n), \varphi \rangle = \langle \sum_k f[e_n(k)] \delta_k, \varphi \rangle = \sum_{-N}^M f[e_n(k)] \cdot \varphi(k)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-N}^M f[e_n(k)] \cdot \varphi(k) &= \sum_{-N}^M \lim_{n \rightarrow \infty} f[e_n(k)] \cdot \varphi(k) = \sum_{-N}^M f[e(k)] \cdot \varphi(k) \quad \forall \varphi \\ &= \langle F(e), \varphi \rangle \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$F(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} F[e_n(k)] = F\left[\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(k)\right]$$

### 2.2.3 Conséquence

On peut appliquer le théorème des filtres à F:

$$F(e_1 \star e_2) = F(e_1) \star e_2 = F(e_2) \star e_1$$

En prenant  $e_1 = e$  et  $e_2 = \delta$  :  $s = F(e \star \delta) = F(e) = F(\delta) \star e$

$$s = e \star F(\delta)$$

$F(\delta)$  est la réponse impulsionnelle du filtre discret.



## 2.3 Produit de convolution discret

### 2.3.1 Réponse à l'impulsion unité (ou de Dirac)

Considérons comme entrée d'un filtre discret, le signal de Dirac et soit  $h$  la réponse du système.

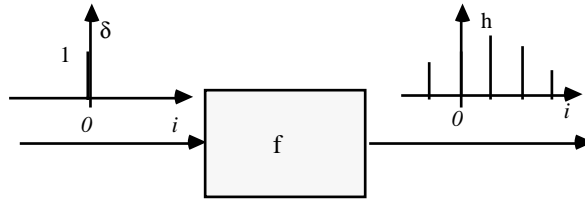


Fig. 12.

- point de vue "fonction"

$$h(k) = f[\delta(k)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \delta(k-n)$$

puisque  $f$  est linéaire et stationnaire

- point de vue "distribution"

$$F(\delta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot \delta_k$$

### 2.3.2 Réponse à une entrée quelconque

démonstration directe

$$e(k) = \sum_n e(n) \delta(k-n)$$

(les  $e(n)$  sont des coefficients de pondération des  $\delta(k-n)$ )

$$f \left[ \sum_{n=-N}^{+N} e(n) \delta(k-n) \right] = \sum_{n=-N}^{+N} e(n) f[\delta(k-n)]$$

puis, par passage à la limite (continuité),

$$f[e(k)] = s(k) = f \left[ \sum_n e(n) \delta(k-n) \right] = \sum_n e(n) f[\delta(k-n)] = \sum_n e(n) h(k-n)$$

$$s(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(n) h(k-n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e(k-m)$$

il s'agit du *produit de convolution discret*.

### Application du théorème des filtres

$$e = \sum_k e(k) \delta_k ; s = \sum_m s(m) \delta_m ; F(\delta) = \sum_n h(n) \delta_n$$

$$s = F(\delta) * e = \left[ \sum_n h(n) \delta_n \right] * \left[ \sum_k e(k) \delta_k \right]$$

or

$$\delta_n * \delta_k = \delta_{k+n}$$

donc :

$$s = \sum_n \sum_k h(n) e(k) \delta_{k+n}$$

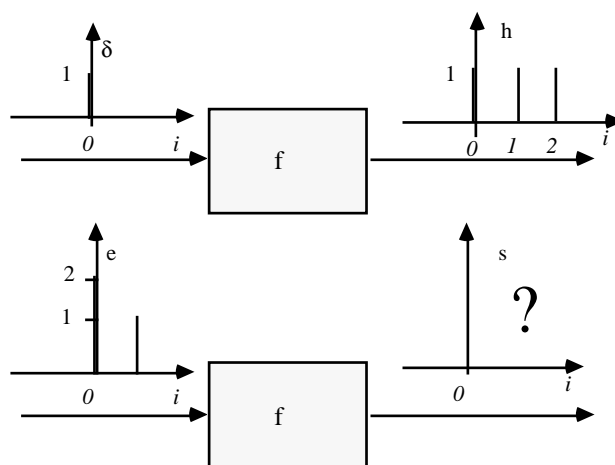
en posant  $p = k + n$  soit  $n = p - k$

$$\begin{aligned} s &= \sum_k \sum_p h(p-k) e(k) \delta_p = \sum_p \left\{ \sum_k h(p-k) e(k) \right\} \delta_p \\ &= \sum_p s(p) \delta_p \end{aligned}$$

d'où:

$$s(n) = \sum_k e(k) h(n-k)$$

### Illustration



**Fig. 13.** Illustration du produit de convolution

- calcul direct de  $s(n)$  :

$$\begin{aligned}
s(0) &= e(0)h(0) && = 2 \\
s(1) &= e(0)h(1) + e(1)h(0) && = 3 \\
s(2) &= e(0)h(2) + e(1)h(1) + e(2)h(0) && = 3 \\
s(3) &= e(0)h(3) + e(1)h(2) + e(2)h(1) + e(3)h(0) && = 1
\end{aligned}$$

• décomposition

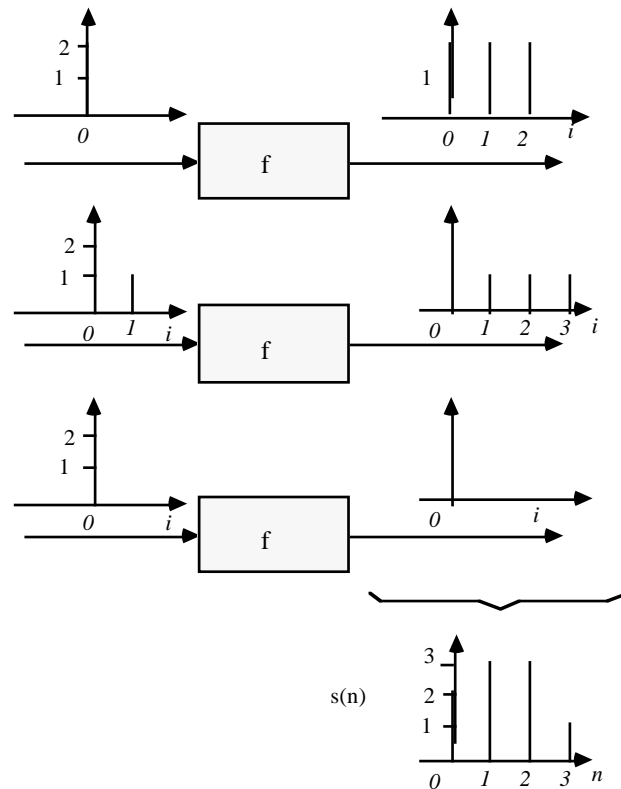


Fig. 14. Décomposition du produit de convolution

### 2.3.3 Filtre causal - Produit de corrélation

- Un système est causal (la sortie ne précède pas l'entrée) si  $h(k) = 0 \quad \forall k < 0$ .
- Soient deux signaux  $e$  et  $s$ . Le produit de corrélation de  $e$  et  $s$  est défini par :

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(n) s(k+n)$$

### 2.3.4 Equation de filtrage

De la même manière qu'un système à temps continu est représenté par une équation différentielle  $\left(\sum_i \alpha_i s^{[i]}(t) = \sum_j \beta_j e^{[j]}(t)\right)$ , un filtre discret peut être représenté par une équation aux différences ou équation récurrente :

$$s(k) = \sum_{i=0}^N a_i e(k-i) - \sum_{j=1}^M b_j s(k-j)$$

On note que dans l'équation récurrente  $i, j \geq 0$  ; si tel n'était pas le cas, il faudrait connaître les valeurs des signaux aux instants suivants pour calculer la sortie à l'instant de référence.

### 2.3.5 Filtres récurrents et non récurrents

- un filtre est dit non récurrent si  $b_j = 0, \forall j \geq 1$

La réponse impulsionnelle est finie (en extension). On dit encore que ces filtres sont à mémoire finie : la valeur actuelle de la sortie ne dépend que de la valeur actuelle de l'entrée et de ses  $N$  valeurs passées.

- un filtre est dit récurrent du  $M^{\text{ième}}$  ordre dans le cas contraire.

Sa réponse impulsionnelle est infinie. La mémoire du filtre est infinie.

Exemple : filtre du 1<sup>er</sup> ordre

$$s(k) = e(k) + 2e(k-1) - 3s(k-1)$$

Les retards peuvent être réalisés à l'aide de bascules ou de circuits à décalage, les multiplications et les additions à l'aide de circuits logiques.

Réalisation :

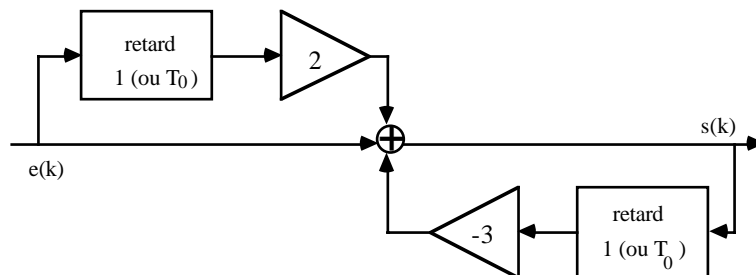


Fig. 15. Filtre récurrent d'ordre 1

## 2.4 Stabilité des filtres discrets

Définition :

Un système discret est stable si et seulement si la réponse du système à une entrée bornée est bornée.

**Théorème :**

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système discret soit stable est :

$$\sum_n |h(n)| < \infty$$

• *Condition suffisante :*

Si la suite d'entrée  $e(n)$  est bornée :  $|e(n)| < M \quad \forall n$

Alors

$$|s(n)| \leq \sum_m |h(m)| |e(n-m)| \leq M \sum_m |h(m)|$$

Si  $\sum_m |h(m)| < \infty$  alors  $|s(n)|$  est borné.

• *Condition nécessaire :*

Si on prend en entrée :

$$\left. \begin{array}{l} e(n) = 1 \quad \text{si } h(n) \geq 0 \\ e(n) = -1 \quad \text{si } h(n) < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow e(n) = \text{sign}(h(n))$$

avec :  $h(n)$  paire

$$\begin{aligned} s(0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(n)h(-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sign}(h(n)) \cdot h(-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(-n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \end{aligned}$$

Si  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$  n'est pas vérifiée, alors,  $s(0)$  n'est pas borné et le système n'est pas stable.

# Chapitre 3

## La transformation en z

### 3.1 Définition

#### 3.1.1 Transformée de Laplace d'une suite discrète

Considérons le signal défini par la suite discrète  $x(k)$  ou la distribution :

$$x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta_k = \sum_k x(k) \delta_k$$

La transformée de Laplace de  $x$  est donnée par :

$$\begin{aligned} L(x) &= \langle x, e^{-pt} \rangle = \langle \sum_k x(k) \delta_k, e^{-pt} \rangle \\ &= \sum_k x(k) e^{-pk} \end{aligned}$$

Notation:

Afin d'éviter toute confusion avec la Transformée de Laplace du signal à temps continu,  $L(x)$  est notée  $X(e^p)$ .

#### 3.1.2 Transformée en z

Posons  $e^p = z$

Nous obtenons :

$$X(e^p) |_{z=e^p} = \sum_k x(k) z^{-k}$$

Cette expression simplifiée de la transformée de Laplace par changement de variable est appelée *Transformée en z* du signal  $x(k)$ .

Notation :

$$X(z) = \sum_k x(k)z^{-k} \quad (= X(e^p)|_{e^p=z})$$

### 3.1.3 Transformée de Fourier d'une suite discrète

Rappel :

La transformée de Fourier de la distribution  $\delta_k$  est la distribution définie par la fonction:

$$F(\delta_k) = \langle \delta_k, e^{-j\alpha t} \rangle = e^{-jk\alpha}$$

La transformée de  $x = \sum_k x(k) \delta_k$  - si elle existe - est donc définie par la fonction :

$$F(x) = \langle \sum_k x(k) \delta_k, e^{-j\alpha t} \rangle = \sum_k x(k) e^{-jk\alpha} = X(z)|_{z=e^{j\alpha}}$$

Notation :

$$X(e^{j\alpha}) = \sum_k x(k) e^{-jk\alpha}$$

### 3.1.4 Propriétés de la Transformée de Fourier d'un signal discret

$$X(e^{j\alpha}) = \sum_k x(k) e^{-jk\alpha}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, X[e^{j(\alpha+2n\pi)}] = X(e^{j\alpha})$$

$X(e^{j\alpha})$  est donc périodique, de période  $2\pi$  ; donc  $X(e^{j\alpha})$  peut se mettre sous la forme d'une série de Fourier.

$$X(e^{j\alpha}) = \sum_n C_n e^{jn\alpha}$$

avec

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\alpha}) e^{-jn\alpha} d\alpha$$

d'où :

$$x(n) = C_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\alpha}) e^{jn\alpha} d\alpha$$

- *Remarque 1 :*

Nous nous sommes placés dans le cas de signaux de type  $x(n)$ . En considérant un signal échantillonné  $x(nT_0)$ , nous poserons  $\alpha = \omega T_0 = 2\pi\nu T_0$

En effet :

$$x = \sum_n x(nT_0) \delta_{nT_0}$$

$$F(x) = \langle \sum_n x(nT_0) \delta_{nT_0}, e^{-j\omega t} \rangle$$

$$= \sum_n x(nT_0) e^{-jn2\pi\nu T_0} = X [e^{j2\pi\nu T_0}]$$

Cette fonction est périodique, de période  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0$   
d'où :

$$x(nT_0) = \frac{1}{\nu_0} \int_{\nu_0} X(e^{j2\pi\nu T_0}) e^{jn2\pi\nu T_0} d\nu$$

- *Remarque 2 :*

Comme pour les signaux à temps continu, la transformée de Fourier d'un signal discret est une représentation en fréquence de ce signal.

- *Remarque 3 :*

Ces résultats sont à mettre en parallèle avec la transformée de Fourier des signaux périodiques.

### 3.1.5 Réponse fréquentielle d'un filtre discret

Considérons le filtre discret de réponse impulsionnelle  $h(n)$

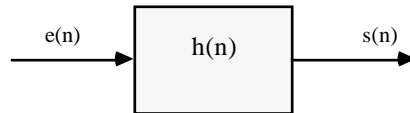


Fig. 16.

$$s = \sum_n s(n) \delta_n = \sum_n \left[ \sum_k h(n-k) e(k) \right] \delta_n$$

soit

$$e = \sum_k e^{jk\alpha} \delta_k, \quad e(k) = e^{jk\alpha}$$



$$s = \sum_n \left[ \sum_k h(n-k) e^{jk\alpha} \right] \delta_n = \sum_n e^{jn\alpha} \left[ \sum_k h(n-k) e^{-j(n-k)\alpha} \right] \delta_n$$

soit

$$s = \sum_n e^{jn\alpha} \left[ \sum_m h(m) e^{-jm\alpha} \right] \delta_n$$

$$s = H(e^{j\alpha}).e$$

avec

$$e = \sum_k e^{ik\alpha} \delta_k$$

$H(e^{j\alpha})$  : Transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du filtre discret.

Application : filtre à réponse impulsionnelle réelle

$$s = F(e) = H(e^{j\alpha})e$$

$$\sum_k s(k) \delta_k = H(e^{j\alpha}) \sum_k e(k) \delta_k \quad \Rightarrow \quad s(k) = H(e^{j\alpha}) e(k)$$

$$e_1(k) = \cos \alpha k = \frac{1}{2} [e^{jk\alpha} + e^{-jk\alpha}]$$

Le système est linéaire, donc :

$$s(k) = \frac{1}{2} [H(e^{j\alpha}) e^{jk\alpha} + H(e^{-j\alpha}) e^{-jk\alpha}]$$

$$H(e^{j\alpha}) = \sum_k h(k) e^{-jk\alpha}$$

Posons  $H(e^{j\alpha}) = C(\alpha)e^{j\phi(\alpha)}$

$$H(e^{-j\alpha}) = C(-\alpha)e^{j\phi(-\alpha)} = \sum_k h(k) e^{jk\alpha} = H^*(e^{j\alpha})$$

or  $H^*(e^{-j\alpha}) = C(\alpha)e^{-j\phi(\alpha)}$

d'où

$$\left. \begin{aligned} C(\alpha) &= C(-\alpha) \\ \phi(-\alpha) &= -\phi(\alpha) \end{aligned} \right\}$$

module pair, phase impaire

(même résultat que pour un filtre réel à temps continu)

Nous en déduisons :

$$s(k) = \frac{1}{2} [C(\alpha)e^{j\phi(\alpha)}e^{jk\alpha} + C(-\alpha)e^{j\phi(-\alpha)}e^{-jk\alpha}] = \frac{1}{2} [C(\alpha) (e^{j(\phi(\alpha)+k\alpha)} + e^{-j(\phi(\alpha)+k\alpha)})]$$

$$s(k) = C(\alpha) (\cos(\phi(\alpha) + k\alpha))$$

**Conclusion :**

L'entrée est une sinusoïde discrète, la sortie une sinusoïde discrète, de même fréquence, amplifiée par le gain  $C(\alpha)$  du filtre et déphasée du déphasage du filtre à la fréquence  $\alpha$ .  $H(e^{j\alpha})$  est donc la réponse en fréquence du filtre.

## 3.2 Réponse à une entrée quelconque

### 3.2.1 Intérêt de la transformation en z

Soit le filtre discret :

$$e = \sum_k e(k) \delta_k \quad \rightarrow \quad s = \sum_k s(k) \delta_k$$

$$\begin{aligned} S(z) = Z[s(k)] &= \sum_k s(k) z^{-k} = \sum_k \left( \sum_n e(n) h(k-n) \right) z^{-k} \\ &= \sum_k \sum_n e(n) h(k-n) z^{-k+n} z^{-n} \\ &= \left( \sum_n e(n) z^{-n} \right) \cdot \left( \sum_k h(k) z^{-k} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$S(z) = H(z).E(z)$$

Comme la transformation de Laplace en continu, la transformation en z permet, en discret, de passer d'un produit de convolution à un produit simple.  $H(z)$ , transformée en z de la réponse impulsionnelle du filtre discret, est appelée *Fonction de transfert* du filtre.

*Remarque :*

Il est possible d'utiliser la transformation de Laplace.

$$s = e \star h \quad \rightarrow \quad L[s] = L[e].L[h]$$

soit  $S(p) = E(p).H(p)$  et en remplaçant par  $z = e^p$ , il vient :

$$S(z) = E(z).H(z)$$

### 3.2.2 Transformée en z de l'équation récurrente de filtrage

$$s(k) = \sum_{i=0}^N a_i e(k-i) - \sum_{j=1}^M b_j s(k-j)$$

Deux théorèmes sont nécessaires.

#### Théorème du retard

$$\begin{aligned} Z[h(n-k)] &= \sum_n h(n-k) z^{-n} = \sum_n h(n-k) z^{-(n-k)} \cdot z^{-k} \\ Z[h(n-k)] &= z^{-k} \cdot Z[h(n)] \end{aligned}$$

#### Théorème de l'avance

$$Z[h(n+k)] = z^k \cdot Z[h(n)]$$

La transformation en z est linéaire; l'équation récurrente devient :

$$Z[s(k)] = \sum_{i=0}^N a_i \cdot Z[e(k-i)] - \sum_{j=1}^M b_j \cdot Z[s(k-j)]$$

Soient  $S(z) = Z[s(k)]$  et  $E(z) = Z[e(k)]$

$$S(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} E(z) - \sum_{j=1}^M b_j z^{-j} S(z)$$

La fonction de transfert du filtre est donc :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j z^{-j}}$$

## 3.3 Propriétés de la transformation en z

### 3.3.1 Transformée monolatérale

C'est la transformée en z d'un signal causal :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(n) z^{-n}$$

**Théorème de la valeur initiale :**

$$\lim_{z \rightarrow \infty} S(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} s(n) z^{-n} = s(0)$$

$$s(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} S(z)$$

**Théorème de la valeur finale :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) S(z)$$

### 3.3.2 Convergence de la transformée en z

**Rappel sur les séries entières**

Soit la série de terme général  $a_n z^n$ , de somme partielle  $S_i = \sum_{n=0}^i a_n z^n$

1. la série converge dans un domaine  $\mathcal{D}$  si  $\forall z \in \mathcal{D}, \quad \left| \mathcal{S}(\dagger) - \mathcal{S}(\ddagger) \right| \rightarrow 0$  quand  $\ddagger \rightarrow +\infty$ .  $S(z)$  est la somme de la série.
2. La série  $S$  est absolument convergente si la série  $|a_n z^n|$  converge. Une série absolument convergente est convergente.
3. **Lemme d'Abel.** Si la série est convergente en un point  $z = z_0$ , alors elle est convergente et absolument convergente dans le disque  $|z| < |z_0|$  ; elle converge vers une fonction  $H(z)$  holomorphe dans ce domaine.
4. Rayon de convergence. Dans le cas où la série est convergente pour certaines valeurs de  $z$  et divergente pour d'autres, il existe un nombre  $R$  positif tel que la série converge pour  $|z| \leq R$  et diverge pour  $|z| > R$ . Le cercle  $|z| = R$  est appelé cercle de convergence et  $R$  rayon de convergence de la série. Sur le cercle de convergence, la série peut converger ou diverger.
5. Détermination de  $R$ .

Si  $|a_n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow L$  quand  $n \rightarrow \infty$  alors  $R = \frac{1}{L}$ .

Le résultat est le même si  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

## Application

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^0 h(n) z^{-n}}_{H^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} h(n) z^{-n}}_{H^+(z)}$$

$H^-(z)$  : converge pour  $|z| < R_2$

$H^+(z)$  : converge pour  $|z^{-1}| < \frac{1}{R_1}$

- Si  $R_2 > R_1$ , la transformée en  $z$  existe dans une couronne de convergence donnée par  $R_1 < |z| < R_2$  et vaut  $H(z)$ .
- Si  $R_2 \leq R_1$ , la transformée en  $z$  n'existe pas.

## Cas de la transformée monolatérale

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(n) z^{-n}$$

La série converge pour  $|z| > r$  et est égale à une fonction  $H(z)$ , holomorphe dans ce domaine.

Soient  $z_i$  les pôles de  $H(z)$  et  $z_0$  le pôle tel que  $|z_0| > |z_i|, \forall i$ .

$\forall z$  tel que  $|z| > |z_0|$ , la fonction  $H(z)$  est holomorphe et développable en série, ce développement étant unique.

### Conclusion :

le rayon de convergence de la série est  $r = |z_0|$

### 3.3.3 Stabilité d'un filtre causal

#### Définition :

Un filtre discret causal de réponse impulsionnelle  $h(n)$  est stable si et seulement si:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < M$$

#### **Théorème** :

Un filtre discret causal est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert en  $z$  sont à l'intérieur du cercle unité.

- *Condition suffisante :*

hypothèse : les pôles de  $H(z)$  sont à l'intérieur du cercle unité.

$H(z)$  est donc holomorphe pour  $|z| \geq 1$  et développable en série convergente et absolument convergente, ce qui est vrai en particulier pour  $|z| = 1$ . Donc,  $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|$  est bornée et le système est stable.

- *Condition nécessaire :*

hypothèse :  $H(z)$  a un pôle en dehors du cercle unité (au sens large, i.e. y compris un pôle sur le cercle unité). Donc  $z_0 = 1$  est en dehors du domaine de convergence de la série, et  $\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)$  n'est pas borné.

$$\forall A, \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) > A$$

Puisque  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) \right| < \sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|$ , donc  $\forall A, \sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| > A$ , et le filtre n'est pas stable.

*Remarque :*

une série peut converger dans un domaine vers  $H(z)$  sans pour autant que le filtre  $H(z)$  soit stable.

## 3.4 Transformation inverse

### 3.4.1 Rappel

Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans un domaine  $\mathcal{D}$ , et un point  $a$  appartenant ou non à  $\mathcal{D}$ . Soit  $(\mathcal{C})$  un contour fermé entourant  $a$  et appartenant à  $\mathcal{D}$ .  $f(z)$  est développable en série de Laurent au voisinage de  $a$  et ce développement est unique.

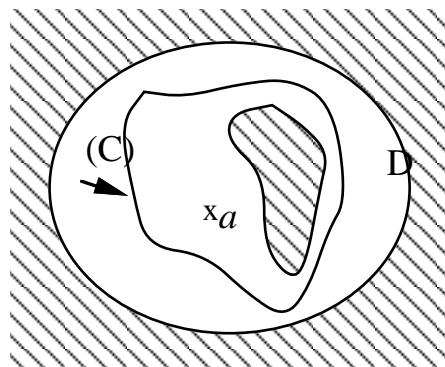


Fig. 17.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n \quad \text{avec } A_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(C)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du$$

### 3.4.2 Application

Considérons la série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$  convergente vers la fonction  $X(z)$  dans le domaine  $r < |z| < R$ .  $X(z)$  est holomorphe dans ce domaine. Soit  $(C)$  un contour fermé dans cet anneau englobant le point  $a = 0$ :

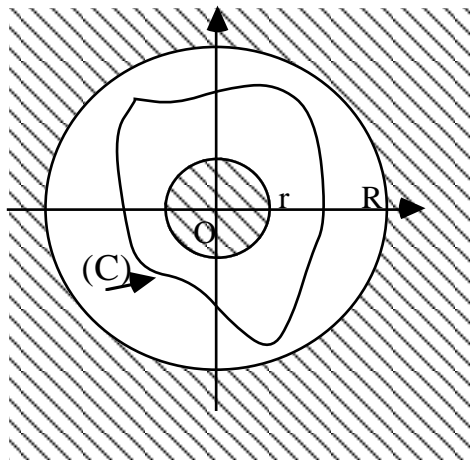


Fig. 18.

$$X(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a(m) z^m$$

avec

$$a(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(C)} \frac{X(z)}{z^{m+1}} dz$$

et le développement est unique.

Changeons  $m$  en  $-n$  et posons  $a(-m) = x(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

avec

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(C)} X(z) z^{n-1} dz$$

### 3.4.3 Autre formulation à l'aide des résidus

Si  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(z - a_p)^n$ , le résidu de  $f(z)$  pour  $z = a_p$  est noté  $\text{Res} [f(z)]_{z=a_p}$

et on a :  $\text{Res} [f(z)]_{z=a_p} = A_{-1}$

Soit une fonction  $f(z)$  holomorphe dans un domaine  $\mathcal{D}$ , sauf en un nombre fini de points  $a_i$  ; soit  $(\mathcal{C}')$  un contour dans  $\mathcal{D}$  englobant tout ou partie de ces points. On a alors :

$$\oint_{(\mathcal{C}')} f(z) dz = 2\pi j \sum_{p=1}^N \text{Res} [f(z)]_{z=a_p}$$

$a_p$ : pôle inclus dans  $(\mathcal{C}')$

### Application à la transformée en z inverse

$$x(n) = \sum_{\substack{\text{pôles de } z^{n-1} X(z) \\ \text{inclus dans } (C)}} \text{Res} [z^{n-1} X(z)]$$

### 3.4.4 Formules

- Si  $a$  est pôle simple de  $f(z)$  :

$$\text{Res} [f(z)]_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} [(z - a) f(z)]$$

- Si  $a$  est pôle d'ordre  $N$  :

$$\text{Res} [f(z)]_{z=a} = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left[ \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} (z - a)^N f(z) \right]$$

### 3.4.5 Division polynômiale

Dans le cas où  $X(z)$  est une fraction rationnelle, on peut effectuer la division polynômiale du numérateur par le dénominateur. Cette méthode permet de trouver facilement les valeurs de  $x(n)$  proches de  $n = 0$ , plus difficilement (sauf cas particuliers) la forme générale des  $x(n)$ .

*exemple :*

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$



$$\begin{array}{r}
z^{-1} \\
\frac{z^{-1} - \sqrt{2}z^{-2} + z^{-3}}{+ \sqrt{2}z^{-2} - z^{-3}} \\
\frac{\sqrt{2}z^{-2} - 2z^{-3} + \sqrt{2}z^{-4}}{z^{-3} - \sqrt{2}z^{-4}} \\
\vdots
\end{array}
\qquad
\left| \frac{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{z^{-1} + \sqrt{2}z^{-2} + z^{-3} - z^{-5} \dots} \right.$$

Fig. 19.

En identifiant les coefficients :

$$x(0) = 0; x(1) = 1; x(2) = \sqrt{2}; x(3) = 1; x(4) = 0; x(5) = -1; \dots$$

### 3.4.6 Développement en série

Conséquence : Lorsque, dans la transformée en  $z$ , interviennent des fonctions dont le développement en série de Laurent au voisinage de zéro est connu, on peut obtenir les  $x(n)$  par identification.

*exemple :*

$$X(z) = (1 + z^{-1}) e^{z^{-1}}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}(n+1)}{n!}$$

d'où:

$$x(n) = \frac{n+1}{n} u(n)$$

avec

$$\begin{aligned}
u(k) &= 1 & \forall k \geq 0 \\
&= 0 & \text{sinon}
\end{aligned}$$

## 3.5 Transformée en $z$ d'un produit

### 3.5.1 Détermination

Considérons le produit temporel de deux signaux discrets :

$$x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \quad x_3 = \sum_n x_2(n) x_1(n) \delta_n$$

Supposons que  $X_1(z)$  (resp.  $X_2(z)$ ), la transformée en  $z$  de  $x_1(n)$  (resp.  $x_2(n)$ ), soit holomorphe pour  $r_1 < |z| < R_1$  (resp.  $r_2 < |z| < R_2$ ).

Dans le domaine de convergence :

$$X_3(z) = \sum_n x_1(n) x_2(n) z^{-n}$$

Soit

$$\begin{aligned} X_3(z) &= \sum_n \frac{1}{2\pi j} \left[ \oint_{(C)} X_1(u) u^{n-1} du \right] x_2(n) z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{(C)} X_1(u) \left[ \sum_n x_2(n) \left( \frac{z}{u} \right)^{-n} \right] \frac{du}{u} \end{aligned}$$

- $X_1(u)$  convergence pour :  $r_1 < u < R_1$
- $X_2\left(\frac{z}{u}\right)$  convergence pour :  $r_2 < \frac{z}{u} < R_2$

Donc  $X_3(z)$  converge pour  $r_1 r_2 < z < R_1 R_2$

### 3.5.2 Puissance d'un signal discret - Théorème de Parseval

La puissance du signal discret  $x(n)$  est par définition :

$$P = \sum_n |x(n)|^2$$

Posons  $x_1(n) = x(n)$ ,  $x_2(n) = x^*(n)$  et calculons  $X_3(z)$  pour  $z = 1$  :

$$X_3(1) = \sum_n |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(C)} X_1(u) X_2\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u}$$

En intégrant sur le cercle unité  $u = e^{j2\pi\nu}$ ,  $\nu \in [0, 1]$

$$X_1(e^{j2\pi\nu}) = \sum_n x(n) e^{-j2\pi n\nu} = X(e^{j2\pi\nu})$$

$$X_2(e^{-j2\pi\nu}) = \sum_n x^*(n) e^{j2\pi n\nu} = X^*(e^{j2\pi\nu})$$

Il vient donc :

$$\sum_n |x(n)|^2 = \int_0^1 |X(e^{j2\pi\nu})|^2 d\nu$$

(Relation de Parseval pour des signaux discrets)

### 3.6 Transformées usuelles

- Impulsion unité

$$\delta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta_k \quad \text{avec } a_0 = 1; a_k = 0, \forall k \neq 0$$

$$Z[\delta] = 1$$

- Echelon unité

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k \quad \Rightarrow \quad U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}$$

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ converge pour } |z| > 1$$

- Rampe unité

$$r = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \delta_k \quad \Rightarrow \quad R(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot z^{-k}$$

$$\frac{dU(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d(z^{-k})}{dz} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-k) z^{-k-1} = -z^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} k z^{-k} = -z^{-1} R(z)$$

$$R(z) = \frac{z^{-1}}{(z^{-1} - 1)^2} \text{ converge pour } |z| > 1$$

- $e(k) = a^k u(k)$

$$E(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (az^{-1})^k$$

$$E(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ converge pour } |z| > a$$

en particulier pour  $a = e^{j\alpha}$ , donc  $\frac{1}{1 - e^{j\alpha} z^{-1}}$  converge pour  $|z| > 1$

*Conséquences:*

convergence pour  $|z| > 1$

$$Z[\sin(\alpha k)] = \frac{z^{-1} \sin \alpha}{1 - 2z^{-1} \cos \alpha + z^{-2}} ; \quad Z[\cos(\alpha k)] = \frac{1 - z^{-1} \cos \alpha}{1 - 2z^{-1} \cos \alpha + z^{-2}}$$

### 3.7 Exemple : filtre récursif du premier ordre

Soit un filtre discret causal d'équation récurrente :

$$s(k) = a_0 e(k) - b_1 s(k-1)$$

Réalisation :

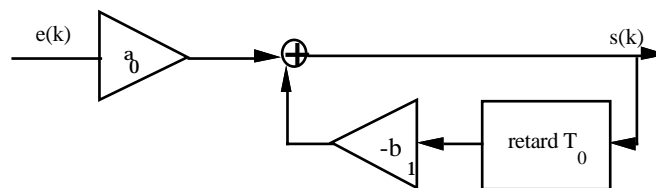


Fig. 20.

Fonction de transfert en  $z$  :

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}}$$

- Le système est causal :  $|z| > |b_1|$
- Le système est stable pour :  $|b_1| < 1$

Réponse temporelle (impulsionnelle):

$$h(n) = \text{Res} \left[ z^{n-1} H(z) \right]_{z=-b_1} = \text{Res} \left[ \frac{a_0 z^n}{z + b_1} \right]_{z=-b_1}$$

$$h(n) = a_0 (-b_1)^n ; n \geq 0 \quad h(n) = 0 ; n < 0$$

Réponse fréquentielle :

$$H(e^{j\alpha}) = H(z)|_{z=e^{j\alpha}} = \frac{a_0}{1 + b_1 \cos \alpha - j b_1 \sin \alpha}$$

soit:

$$\begin{cases} |H(e^{j\alpha})| = \frac{a_0}{\sqrt{1+b_1^2+2b_1 \cos \alpha}} \\ \text{Arg } H(e^{j\alpha}) = \text{Arctg } \frac{b_1 \sin \alpha}{1+b_1 \cos \alpha} \end{cases}$$

Deux cas interviennent :  $1 > b_1 > 0$  et  $0 > b_1 > -1$

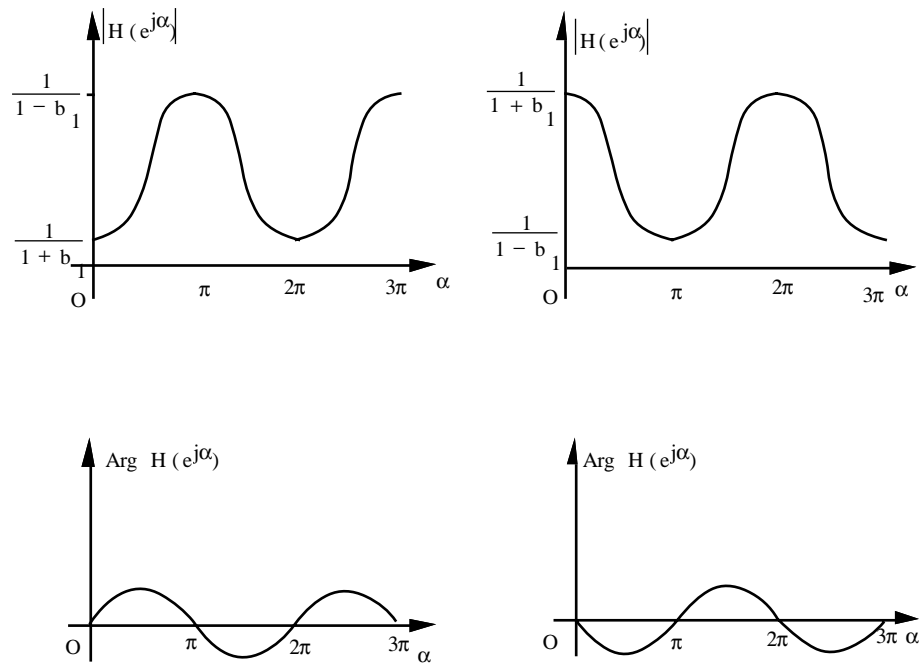


Fig. 21.

# Chapitre 4

## Relations entre signaux continus et signaux échantillonnés

### 4.1 Relations entre transformée en z et transformée de Laplace

#### 4.1.1 Première relation

Soit  $x(t)$  un signal continu admettant une transformée de Laplace  $X(p)$ .  
Soit  $x_e(t)$  le signal échantillonné obtenu à partir de  $x(t)$ , admettant une transformée en z,  $X_e(z)$ . La relation liant ces deux transformées (chap. 3) est :

$$X_e(p) = X_e(z) \Big|_{z=e^{pT_0}}$$

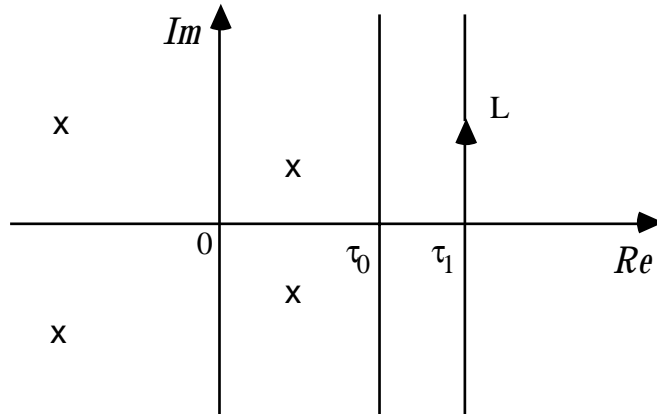
#### 4.1.2 Deuxième relation

Nous allons établir une relation entre la transformée de Laplace d'un signal à temps continu et la transformée en z de ce signal échantillonné à la cadence  $T_0$ .

Cas des signaux et systèmes causaux :  $X(p) = L[x(t)]$

Rappel :

- $X(p)$  est holomorphe dans un domaine D de  $\mathbb{C}$  défini par  $\Re(p) \geq \tau_0$ . Donc les pôles de  $X(p)$ , s'ils existent, sont à gauche de la droite d'équation  $\Re(p) = \tau_0$



**Fig. 22.** Pôles de  $X(p)$

- la transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tau_1 - j\infty}^{\tau_1 + j\infty} X(p) e^{pt} dp \quad \text{avec } \tau_1 > \tau_0$$

Application à la transformée en  $z$  d'un signal ou d'un système causal

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_0) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{\tau_1 - j\infty}^{\tau_1 + j\infty} X(p) e^{pnT_0} dp \right) z^{-n}$$

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tau_1 - j\infty}^{\tau_1 + j\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{pT_0} z^{-1})^n \right) X(p) dp$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{pT_0} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{pT_0} z^{-1}} \quad \text{pour } |z| > |e^{pT_0}|$$

soit en intégrant sur  $L : |z| > e^{\tau_1 T_0}$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tau_1 - j\infty}^{\tau_1 + j\infty} \frac{X(p)}{1 - e^{pT_0} z^{-1}} dp$$

Recherche des pôles (en  $p$ ) de  $\frac{1}{1 - e^{pT_0} z^{-1}}$  ?

Posons  $z = e^{uT_0}$ ,  $u \in \mathbb{C}$   $e^{(p-u)T_0} = 1 = e^{jk2\pi}$

$$\Rightarrow p = u + j \frac{k2\pi}{T_0}$$

Or  $|z| > |e^{pT_0}| \iff |e^{uT_0}| > |e^{pT_0}|$

soit :  $e^{\Re(u)T_0} > e^{\Re(p)T_0}$  et :

$$\Re(u) > \Re(p) = \tau_1 \text{ sur } L$$

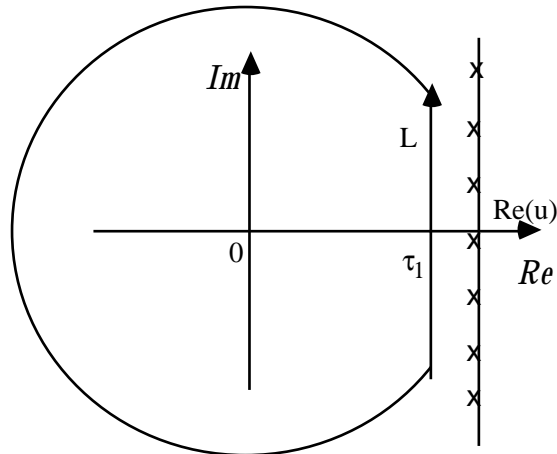


Fig. 22. Pôles de  $\frac{1}{1-e^{pT_0} z^{-1}}$

Les pôles recherchés sont répartis sur la droite d'équation  $\Re(p) = \Re(u)$  qui se trouve à droite de  $L$ . En fermant le contour  $L$  par un "demi cercle infini à gauche", il vient :

$$X(z) = \sum_{\text{pôles de } X(p)} \text{Res} \left[ \frac{X(p)}{1-e^{pT_0} z^{-1}} \right]$$

## 4.2 Mise en cascade de systèmes échantillonnés

### 4.2.1 Fonction de transfert en $z$ d'un système échantillonné

Définition :

Un système échantillonné est un système continu (défini par sa fonction de transfert  $H(p)$ ) dont l'entrée et la sortie sont échantillonnées à la même cadence  $T_0$  de manière synchrone.

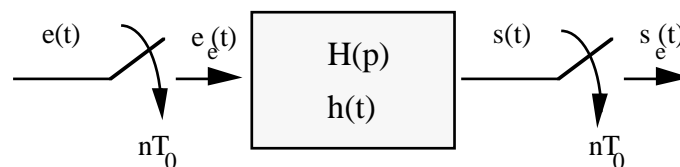


Fig. 23. Système échantillonné



$$s = h * e_e = h * \sum_n e(nT_0) \delta_{nT_0} = \sum_n e(nT_0) (\delta_{nT_0} * h)$$

Donc :

$$s(t) = \sum_n e(nT_0) h(t - nT_0)$$

$$s(kT_0) = \sum_n e(nT_0) h[(k - n)T_0]$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} s_e &= \sum_k s(kT_0) \delta_{kT_0} = \sum_k \left( \sum_n e(nT_0) h[(k - n)T_0] \right) \delta_{kT_0} \\ &= \sum_n \left( \sum_k h[(k - n)T_0] \delta_{kT_0} \right) e(nT_0) \end{aligned}$$

La convolution est distributive par rapport à l'addition et de plus

$$\delta_{kT_0} = \delta_{(k-n)T_0} \star \delta_{nT_0}$$

Donc:

$$s_e = \sum_n \left( \sum_k h[(k - n)T_0] \delta_{(k-n)T_0} * \delta_{nT_0} \right) e(nT_0)$$

En posant  $m = k - n$ :

$$s_e = \left[ \sum_n e(nT_0) \delta_{nT_0} \right] \star \left[ \sum_m h(mT_0) \delta_{mT_0} \right]$$

soit:

$$s_e = e_e \star h_e$$

Le filtre échantillonné est équivalent au filtre discret dont la réponse impulsionnelle est la réponse impulsionnelle échantillonnée du filtre continu.

$$S(z) = E(z)H(z) \quad \text{avec} \quad H(z) = \sum_{\text{pôles de } H(p)} \text{Res} \left[ \frac{H(p)}{1 - e^{pT_0} z^{-1}} \right]$$

## 4.2.2 Application : mise en cascade

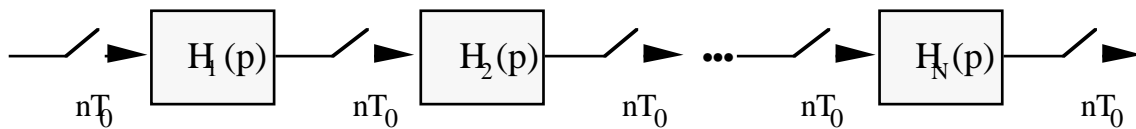


Fig. 24. mise en cascade de systèmes échantillonnés

L'ensemble est équivalent au filtre discret de fonction de transfert :

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \dots H_N(z)$$

Remarque

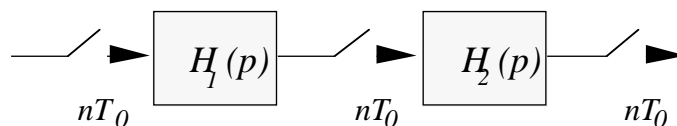


Fig. 25.

La fonction de transfert équivalente est  $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$

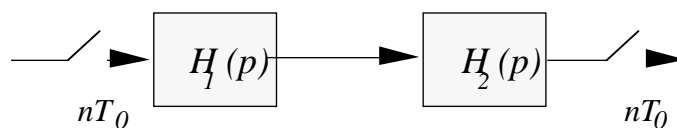


Fig. 26.

La fonction de transfert équivalente est  $H'(z) = Z[H_1(p) \cdot H_2(p)]$

En général,  $H'(z) \neq H(z)$

## 4.3 Reconstruction d'un signal continu

### 4.3.1 Bloqueur d'ordre 0

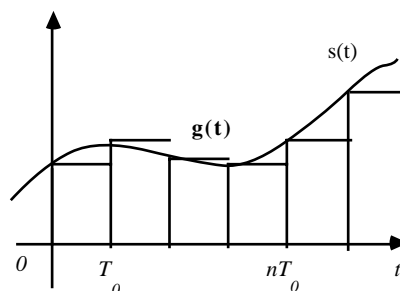


Fig. 27. Reconstruction du signal au moyen d'un bloqueur d'ordre 0

$s(t)$  est approché par le signal :

$$g(t) = s(kT_0) \quad kT_0 < t \leq (k+1)T_0$$

La réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre 0 est :

$$\begin{cases} g_0(t) = 1 & \text{si } 0 < t \leq T_0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa fonction de transfert est donc :

$$G_0(p) = \int_0^{T_0} e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p}$$

### 4.3.2 Utilisation

Le bloqueur d'ordre 0 est utilisé pour commander un système continu par un signal discret.

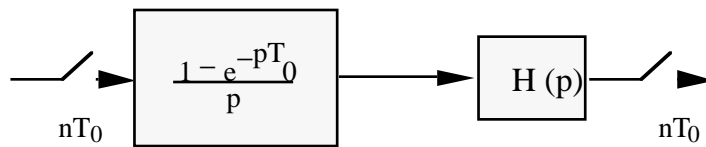


Fig. 28.

schéma équivalent :

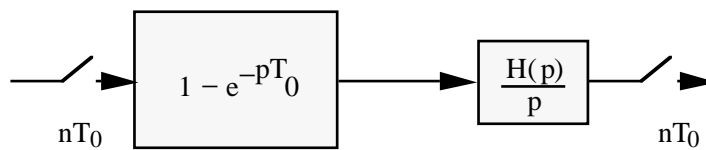


Fig. 29.

Or :

$1 =$  Identité et  $e^{pT_0} =$  retard pur de  $T_0$ , on peut donc introduire un échantillonneur entre les deux fonctions de transfert.

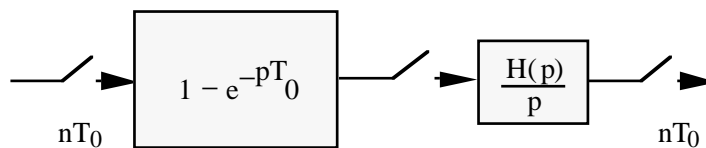


Fig. 30.

Et finalement, puisque  $Z [1 - e^{-pT_0}] = 1 - z^{-1}$

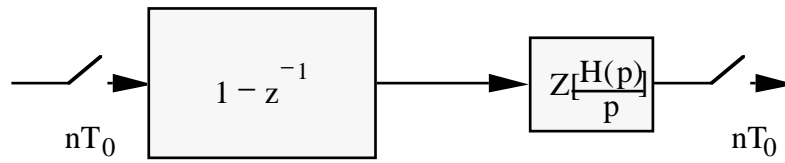


Fig. 31.

# Chapitre 5

## Structure des filtres discrets

### 5.1 Structure directe

#### 5.1.1 Rappel

Soit  $h = \sum_n h(n) \delta_n$  la réponse impulsionnelle d'un filtre discret.

Soient  $e = \sum_k e(k) \delta_k$  son entrée et  $s = \sum_n s(n) \delta_n$  sa sortie.

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k) h(n-k)$$

L'équation récurrente de filtrage s'écrit :

$$s(k) = \sum_{i=0}^N a_i e(k-i) - \sum_{j=1}^M b_j s(k-j)$$

La fonction de transfert en  $z$  :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j z^{-j}}$$

Le filtre est non récursif si  $b_j \neq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, M$   
Le filtre est récursif sinon.

Cas des filtres non récursifs :

$$s(k) = \sum_{i=0}^N a_i e(k-i)$$

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \delta_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^N a_i e(n-i) \right) \delta_n \\
s &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^N a_i e(n-i) \delta_{n-i} * \delta_i \\
&= \left( \sum_{i=0}^N a_i \delta_i \right) * \left( \sum_n e(n-i) \delta_{n-i} \right) \\
&= \left( \sum_{i=0}^N a_i \delta_i \right) * e
\end{aligned}$$

Il vient donc :

$$h = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \delta_n = \sum_{i=0}^N a_i \delta_i$$

$$h(i) = \begin{cases} a_i & \forall i = 0, 1, \dots, N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les filtres non récursifs sont donc des filtres à réponse impulsionnelle finie (filtres RIF).

En revanche, les filtres récursifs sont des filtres à réponse impulsionnelle infinie (filtres RII).

Les filtres RIF sont toujours stables puisque  $\sum_{i=0}^N |h(n)|$  est une somme finie.

### 5.1.2 Structure de filtre récursif

La structure directe est la traduction fidèle de l'équation récurrente:

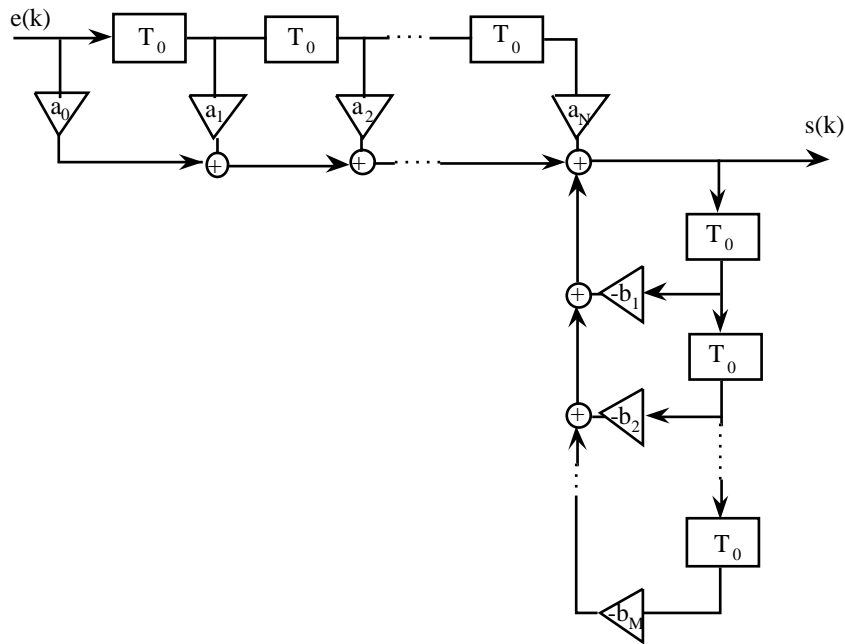


Fig. 32. Structure directe d'un filtre RII

Problèmes :

1. beaucoup de retards à mettre en oeuvre,
2. structure très sensible aux erreurs sur les coefficients.

### 5.1.3 Structure de filtre non récursif

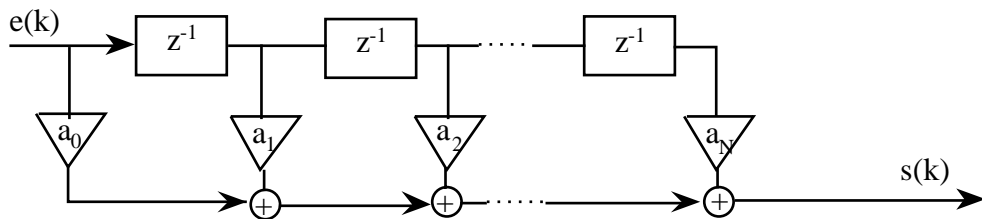


Fig. 33. Structure d'un filtre RIF

Du fait de l'allure de leur structure, ces filtres sont appelés filtres transversaux.

## 5.2 Structure canonique

Le but d'une telle structure est de diminuer le nombre de composants nécessaires à la réalisation d'un filtre, en particulier les retards.

On considère un filtre de fonction de transfert  $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

Le filtrage s'exprime par :

$$S(z) = \frac{N(z)}{D(z)} E(z)$$

Posons  $W(z) = \frac{E(z)}{D(z)}$

On a alors :

$$E(z) = W(z)D(z)$$

$$S(z) = N(z)W(z)$$

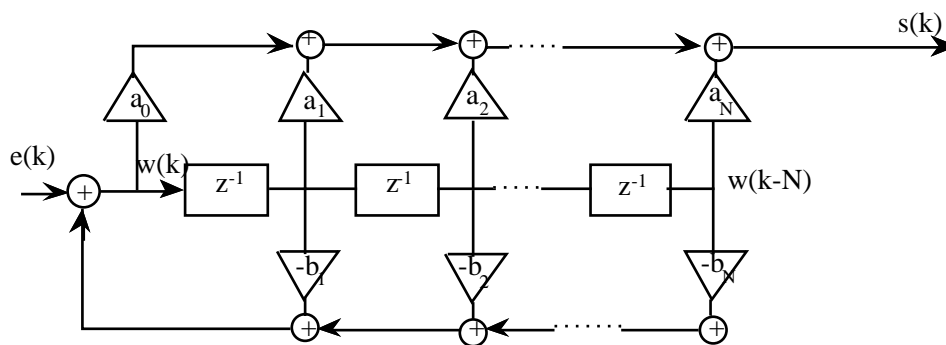
Or:

$$D(z) = 1 + \sum_{j=1}^M b_j z^{-j}$$

$$N(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w(k) = e(k) - \sum_{j=1}^M b_j w(k-j) \\ s(k) = \sum_{i=0}^N a_i w(k-i) \end{cases}$$

Structure (avec  $N = M$ ) :



**Fig. 34.** Structure canonique d'un filtre RII ( $N=M$ )

Cette structure a l'avantage de réduire le nombre de modules "retard".

Exemple : filtre récursif du deuxième ordre

$$s(k) = a_0 e(k) + a_1 e(k-1) + a_2 e(k-2) - b_1 s(k-1) - b_2 s(k-2)$$

La structure directe nécessite :

- 4 retards



- 5 multiplications + 5 registres mémoires
- 4 additions

La structure canonique utilise :

- 2 retards
- 5 multiplications + 5 registres mémoires
- 4 additions

## 5.3 Autres structures

### 5.3.1 Structure cascade

$H(z)$  est factorisé sous la forme :

$$H(z) = \prod_{i=1}^N H_i(z) \quad \text{avec} \quad H_i(z) = \frac{1+a_1^i z^{-1}+a_2^i z^{-2}}{1+b_1^i z^{-1}+b_2^i z^{-2}}$$

Les filtres  $H_i(z)$  du deuxième ordre sont réalisés en structure canonique et mis en cascade:

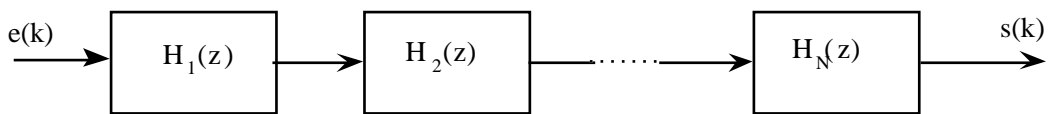


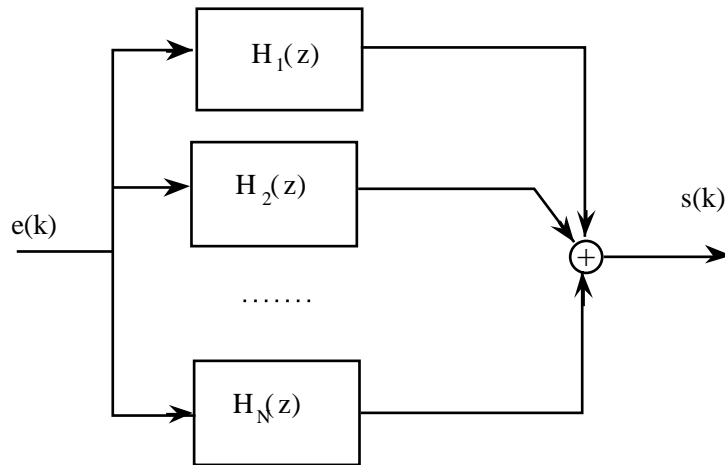
Fig. 35. Structure cascade

### 5.3.2 Structure parallèle

Ici,  $H(z)$  est décomposé en éléments simples du deuxième ordre :

$$H(z) = \sum_{j=1}^N H_j(z)$$

Les  $H_j(z)$  réalisés en structure canonique sont mis en parallèle :



**Fig. 36.** Structure parallèle

La structure parallèle présente, par rapport à la structure cascade, l'avantage d'être moins sensible à une détérioration des performances d'un des filtres du deuxième ordre.

# Chapitre 6

## La transformation de Fourier discrète et les algorithmes rapides pour son calcul

### 6.1 Introduction

La transformée de Fourier (TF) d'un signal discret a été définie par :

$$F[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jn2\pi\nu} = X(\nu)$$

- c'est une fonction de la fréquence  $\nu$ , variable continue,
- elle fait intervenir un nombre infini d'échantillons  $\Rightarrow$  sa forme n'est donc pas appropriée à un traitement numérique. On définit alors une transformation de Fourier discrète (TFD) en discrétisant la fréquence.

Les calculs intervenant dans la TFD peuvent être accélérés en utilisant des algorithmes rapides, appelés algorithmes de transformée de Fourier rapide (TFR).

TFD et TFR sont donc deux outils différents:

la TFD est une véritable transformation

les TFR sont des algorithmes de calcul

### 6.2 Transformation de Fourier discrète d'un signal discret périodique

C'est en fait une série de Fourier discrète, analogue à la série de Fourier des signaux continus périodiques.

## 6.2.1 Définition

Soit le signal  $\tilde{x}(n)$  périodique sur  $N$  échantillons

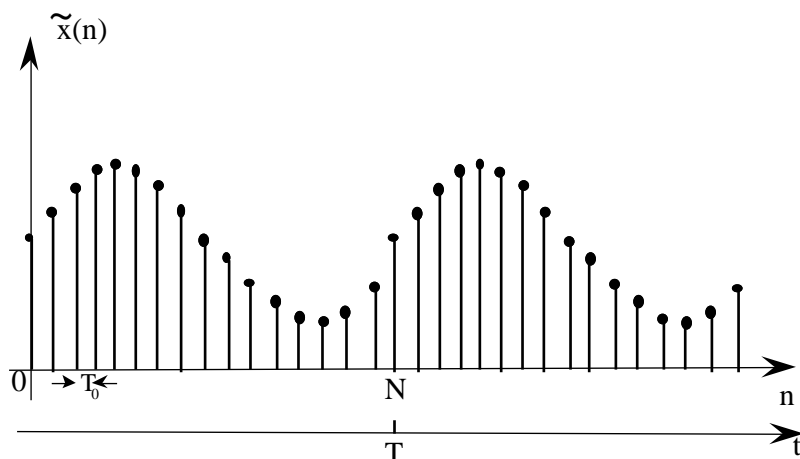


Fig. 37. Signal discret périodique

On définit la TFD de ce signal périodique par :

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (6.1)$$

On pose souvent  $W_N = e^{-\frac{2\pi j}{N}}$ ,  $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$

## 6.2.2 Reconstruction de $\tilde{x}(n)$

On reconstruit  $\tilde{x}(n)$  en considérant la somme suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-km} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{k(n-m)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(n-m)}}_{\substack{=N \text{ si } n=m \\ =0 \text{ si } n \neq m}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Les deux relations (6.1) et (6.2) définissent la transformation de Fourier discrète pour des signaux discrets périodiques de période  $N$ .

### 6.2.3 Relation avec la transformation de Fourier

La transformation de Fourier *restreinte à une période* d'un signal discret périodique s'écrit :

$$X(e^{j\alpha}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jn\alpha}$$

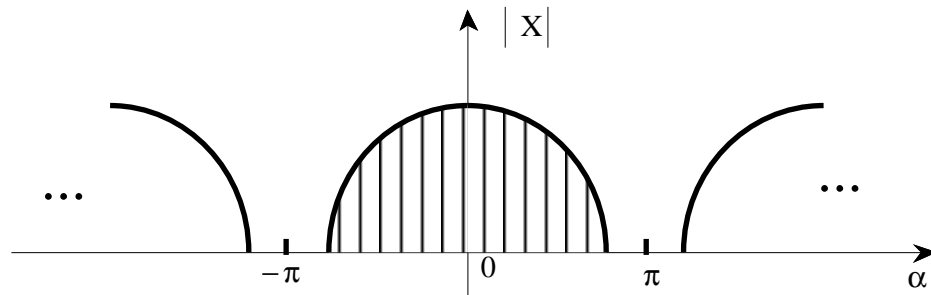


Fig. 38.

Divisons l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  (intervalle fondamental) en  $N$  intervalles égaux : on échantillonne le spectre de  $\tilde{x}(n)$  entre  $-\pi$  et  $\pi$  à la cadence  $\frac{2\pi}{N}$ .

Posons :

$$\alpha = k \frac{2\pi}{N} \quad \text{avec} \quad -\frac{N-1}{2} < k < \frac{N-1}{2}$$

$$X(k) = X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jn\frac{2\pi k}{N}}$$

### 6.2.4 Relation avec la transformation en z

Soit le signal  $x'(n)$  défini par :

$$x'(n) = \tilde{x}(n) \quad \text{si} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$x'(n) = 0 \quad \text{sinon}$$

Alors sa transformée en z s'écrit :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) z^{-n}$$

D'où :

$$X(z) \Big|_{z=W_N^k} = \tilde{X}(k)$$

### 6.2.5 Propriétés

- La TFD d'un signal périodique est elle même périodique. En effet :

$$W_N^{k+mN} = e^{j2\pi\frac{k}{N}} e^{j2\pi m} = W_N^k$$

donc :

$$X(k + N) = X(k)$$

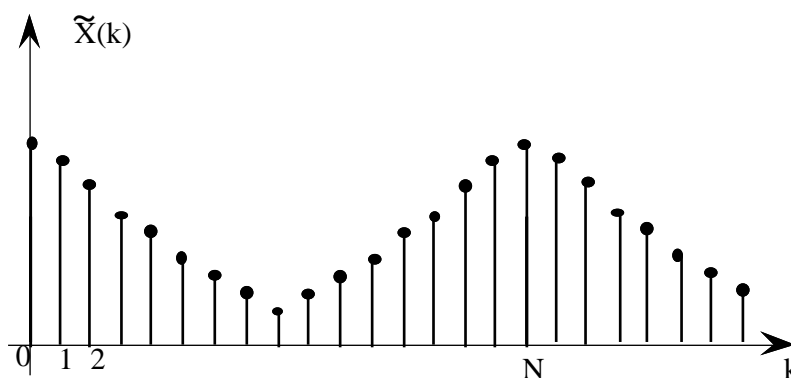


Fig. 39. TFD d'un signal périodique

- La TFD est linéaire

$$TFD [ax_1(n) + bx_2(n)] = a.TFD [x_1(n)] + b.TFD [x_2(n)]$$

### 6.2.6 Filtrage

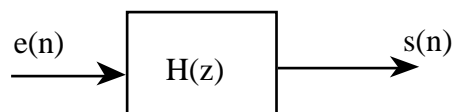


Fig. 39.

$$S(e^{j\alpha}) = H(e^{j\alpha}) \cdot E(e^{j\alpha}) \quad \Rightarrow \quad S(k) = H(k) \cdot E(k)$$

## 6.3 Transformation de Fourier discrète d'un signal de durée finie

Considérons un signal  $x(n)$  de durée  $N$  qui coïncide sur  $0, 1, \dots, N-1$  avec une séquence périodique  $\tilde{x}(n)$ .

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & \text{si } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La TFD de  $x(n)$  est obtenue en sélectionnant les composantes de  $X(k)$  de 0 à  $N - 1$  :

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & \text{si } 0 \leq k \leq N - 1 \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & \text{si } 0 \leq n \leq N - 1 \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

## 6.4 Transformation de Fourier discrète d'un signal de durée infinie

On ne peut pas définir exactement la TFD d'un signal à durée infinie. La TFD n'est alors définie qu'approximativement en limitant la durée du signal par un moyen ad hoc. La troncature la plus évidente consiste à ne conserver que  $N$  points de  $x(n)$ . Autrement dit, cela revient à multiplier ce signal par une fenêtre rectangulaire. Cette solution présente le désavantage de créer des oscillations importantes dans le domaine fréquentiel (phénomène de Gibbs). La solution idéale serait donc de multiplier le signal par une fenêtre dont la transformée de Fourier approche une impulsion de Dirac. Plusieurs fenêtres ont été élaborées, dont les oscillations s'atténuent généralement au détriment de la largeur du lobe principal.

### 6.4.1 Les fenêtres de pondération classiques

1. Bartlett

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

2. Hanning

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

3. Hamming

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

4. Blackman

$$w(n) = 0,42 - 0,5 \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0,08 \cos \left( \frac{4\pi n}{N-1} \right) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

## 5. Kaiser

$$w(n) = \frac{I_0 \left[ w_a \sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left[n - \frac{N-1}{2}\right]^2} \right]}{I_0 \left( w_a \cdot \frac{N-1}{2} \right)} \quad 4 < w_a \left( \frac{N-1}{2} \right) < 9$$

$I_0$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro de première espèce:  $I_0 = 1 + \sum_{m=1}^M \left( \frac{(x/2)^m}{m} \right)^2$

- *Remarque 1:*  
 $w(n)$  est maximale pour  $\frac{N-1}{2}$
- *Remarque 2:*  
pour avoir une fenêtre symétrique par rapport à 0, il faut effectuer le changement de variable  $n$  en  $m = n - \frac{N-1}{2}$ .

### 6.4.2 Compromis Largeur du lobe principal-Atténuation des oscillations

Fenêtres	Largeur du lobe principal	Atténuation des oscillations
Rectangulaire	relativement étroit	2ème lobe à -13 dB
Bartlett	plus large / fenêtre rectangulaire	2ème lobe à -27 dB
Hanning	double / fenêtre rectangulaire	2ème lobe à -32 dB
Hamming	double / fenêtre rectangulaire	2ème lobe à -43 dB
Blackman	plus large / fenêtre Hamming	2ème lobe à -58 dB

La fenêtre de Kaiser permet de prendre en compte le compromis largeur du lobe principal- atténuation des oscillations. En prenant  $w_a$  de l'ordre de 4, 5 on a une atténuation proche de celle de Hamming mais un lobe principal moins large. A  $w_a$  de l'ordre de 9 le pic central est plus large mais une atténuation des oscillations de l'ordre de 90 dB.



### 6.4.3 Représentation spectrale des différentes fenêtres

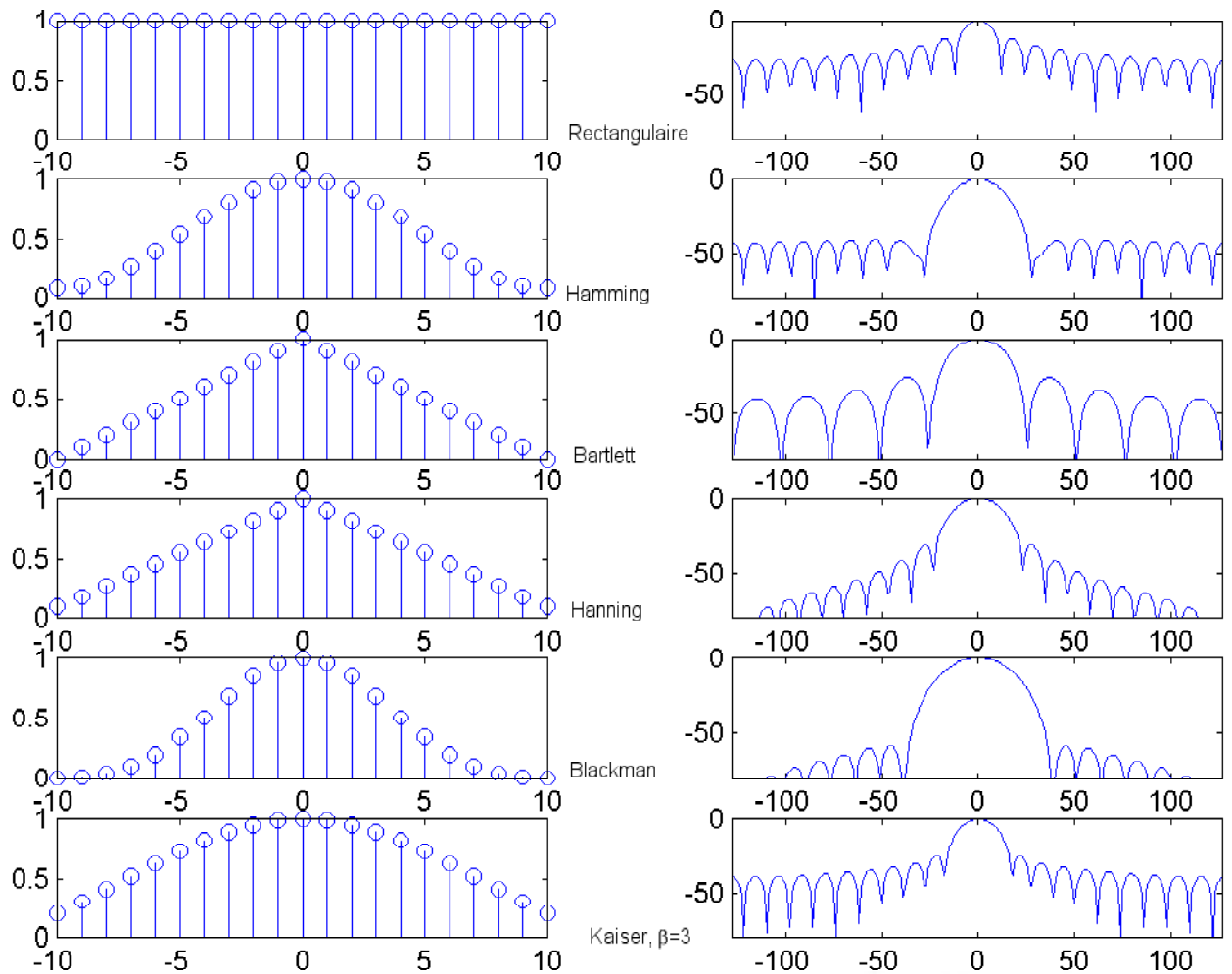
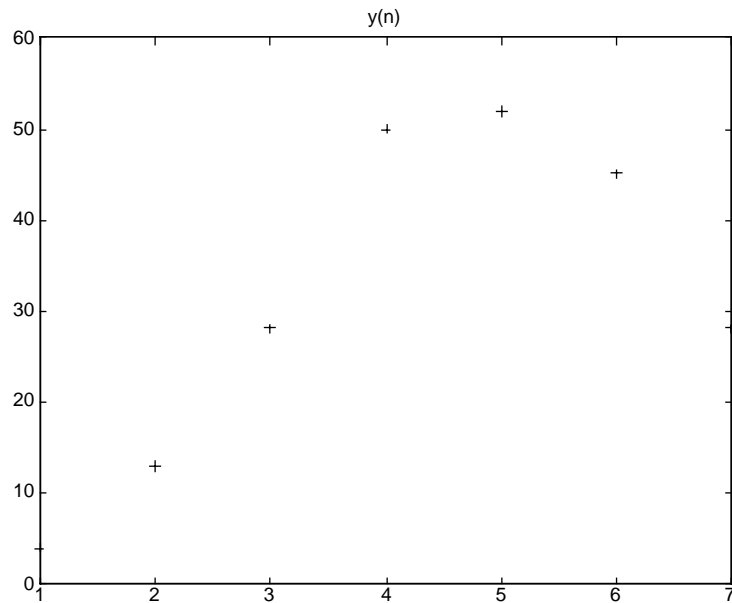


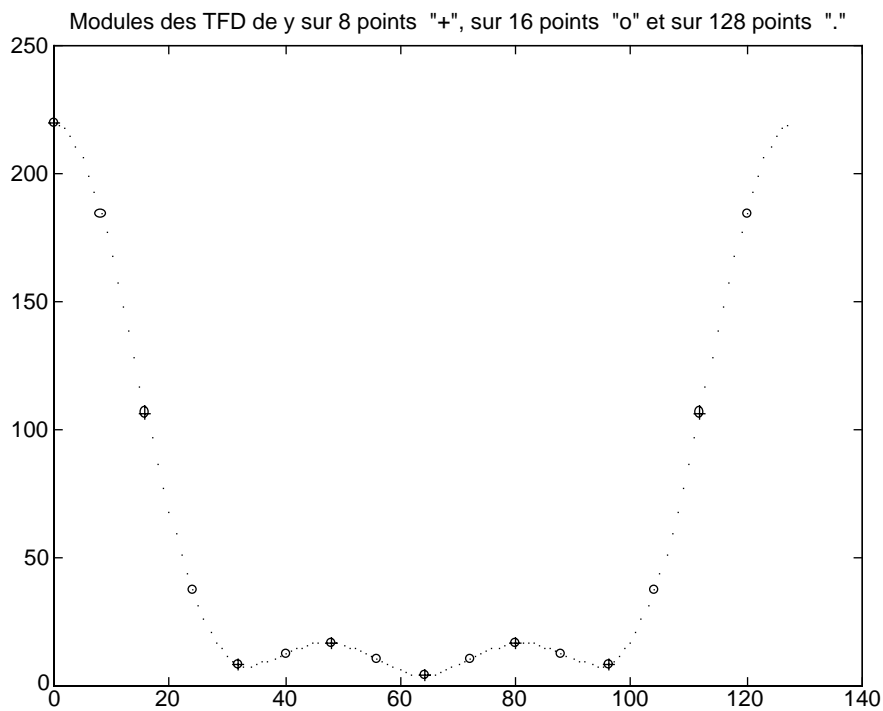
Fig. 40.

### 6.5 Choix de la durée $N$

La TFD  $X(k)$  se calcule sur une durée  $N$  du signal  $x(n)$ , et contient également  $N$  échantillons fréquentiels. Nous allons voir dans cette section l'effet de l'augmentation de la durée  $N$ .



**Fig. 41.** Signal  $y(n)$



**Fig. 42.** TFD de  $y(n)$  avec zéro padding

Cet exemple montre qu'en ajoutant des zéros à la suite des échantillons de  $y(n)$ , sa TFD admet une meilleure résolution (mais aucune nouvelle information n'apparaît). Cette opération appelée "zéro-padding" est souvent utilisée pour atteindre une durée  $N$  puissance de deux, car, comme nous le verrons plus loin, les algorithmes rapides de calcul de TFD utilisent des puissances de deux comme durée des signaux.

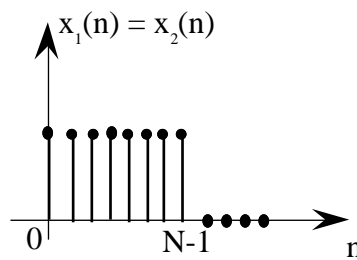
## 6.6 TFD et convolution

### 6.6.1 Convolution de deux signaux de durée finie

Exemple : soient deux signaux  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$  de durée finie  $N$  définis par :

$$x_1(n) = x_2(n) = 1 \quad \text{si } 0 \leq n \leq N - 1$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

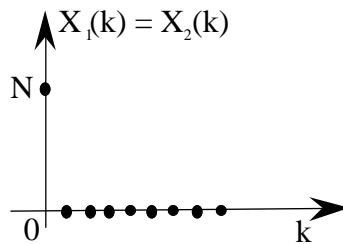


**Fig. 43.** Signaux  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$

$$X_1(k) = X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \begin{cases} N & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

$$X_1(k) \cdot X_2(k) = N^2 \quad \text{si } k = 0$$

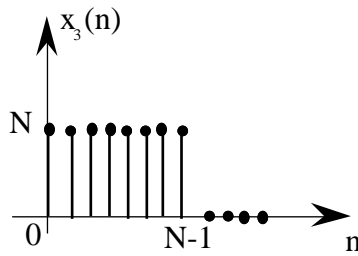
$$= 0 \quad \text{sinon}$$



**Fig. 44.** TFD des signaux  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$

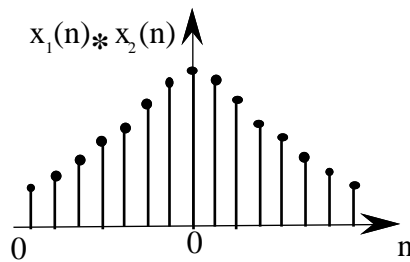
Soit  $X_3(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$ . Par transformée inverse on obtient :

$$x_3(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} = \begin{cases} \frac{1}{N} N^2 = N & \text{si } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



**Fig. 45.**  $\text{TFD}^{-1}$  du produit des TFD de  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$

D'autre part on considère le produit de convolution des deux signaux  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$



**Fig. 46.** Produit de convolution des signaux  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$

On voit donc, que  $x_1(n) \star x_2(n) \neq x_3(n)$ , c'est à dire :

$$\text{TFD}^{-1} [X_1(k) \cdot X_2(k)] \neq \text{TFD}^{-1} [X_1(k)] \star \text{TFD}^{-1} [X_2(k)]$$

## 6.6.2 Produit de convolution circulaire

Le résultat précédent se généralise. On montre que, pour la TFD, le produit simple se transforme non pas en produit de convolution, tel qu'il a été défini précédemment, mais un produit de convolution circulaire que l'on définit de la manière suivante :

Soient  $\tilde{x}_1(n)$  et  $\tilde{x}_2(n)$  les signaux périodiques obtenus en périodisant les signaux de durée finie  $N$ ,  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$ . Leur produit de convolution circulaire est :

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1(k) \tilde{x}_2(n - k)$$

On a alors :

$$\text{TFD} [x_1(n) \otimes x_2(n)] = \text{TFD} [x_1(n)] \cdot \text{TFD} [x_2(n)]$$

### Démonstration

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi j \frac{kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1(i) \tilde{x}_2(n-i) \right] e^{-2\pi j \frac{kn}{N}} \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1(i) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2(n-i) e^{-2\pi j \frac{kn}{N}} \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1(i) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2(n-i) e^{-2\pi j \frac{k(n-i)}{N}} e^{-2\pi j \frac{ki}{N}}
\end{aligned}$$

En posant  $l = n - i$

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(k) &= \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1(i) e^{-2\pi j \frac{ki}{N}} \sum_{l=-i}^{N-1-i} \tilde{x}_2(l) e^{-2\pi j \frac{kl}{N}} \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1(i) e^{-2\pi j \frac{ki}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2(l) e^{-2\pi j \frac{kl}{N}} \\
&= \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)
\end{aligned}$$

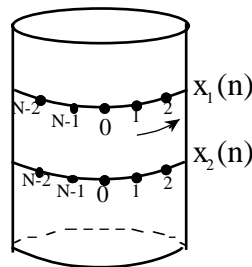
### Remarque

Si  $x_1(n)$  est un signal de durée  $N_1$ , et  $x_2(n)$  de durée  $N_2$ ; leur produit de convolution "linéaire" est de durée  $N_1 + N_2 - 1$ .

$\Rightarrow$  Le produit de convolution linéaire de deux signaux de durée finie  $N_1$  et  $N_2$  peut être obtenu à partir de l'intervalle fondamental d'un produit de convolution circulaire calculé avec une durée  $N \geq N_1 + N_2 - 1$ .

### Interprétation géométrique

On fait tourner sur le cylindre  $x_2$  de  $m$ . On effectue les produits terme à terme et on somme. C'est alors la valeur de la convolution circulaire en  $m$ .



**Fig. 47.** Interprétation géométrique du produit de convolution circulaire

### 6.6.3 Théorème de Parseval

Soit  $x(k) = a_k e^{j\varphi(k)}$  un signal discret et  $X(l)$  sa transformée de Fourier discrète (TFD).

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{lk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\varphi(k)} e^{-j2\pi \frac{lk}{N}}$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j2\pi \frac{lk}{N}}$$

soit  $X'(q)$  la TFD de  $x^*(k)$  :  $X'(q) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p^* e^{-j\varphi(p)} e^{-j2\pi \frac{pq}{N}}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) x^*(k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j2\pi \frac{lk}{N}} \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X(q) e^{j2\pi \frac{qk}{N}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} X(l) X(q) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N}(q+l)} \right] \\ &= 0 \quad \text{si } q+l \neq 0 \\ &= N \quad \text{si } q = -l \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) X(-l)$$

mais  $X'(-l) = X^*(l) \quad \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} |X(l)|^2$$

## 6.7 Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT)

La transformée de Fourier discrète nous permet d'envisager des calculs numériques dans le domaine des fréquences, ce qui permettrait de nombreuses applications d'analyse spectrale. Cependant, le calcul direct par la TFD demande un temps prohibitif même pour nos calculateurs.

Ainsi la TFD de  $N$  points demande  $(N-1)^2$  multiplications complexes et  $N \cdot (N-1)$  additions complexes. Les valeurs de  $N$  nécessaires sont élevées ( $10^3$  par exemple). On a donc introduit des algorithmes permettant de diminuer le temps de calcul : il s'agit de la

transformée de Fourier rapide, ce qui nous a permis de développer l'analyse en fréquence en temps réel. Le nombre d'opérations devient de l'ordre de  $N \log_2 N$ , ce qui offre un gain de temps considérable pour  $N$  élevé.

Exemple historique : Algorithme de COOLEY- TUKEY.

### 6.7.1 Principe

Le principe de la méthode consiste en l'utilisation de la périodicité de  $W_N = e^{-\frac{2\pi j}{N}}$  pour créer des séquences moins longues à calculer, que l'on regroupe ensuite pour donner la TFD.

Exemple :

On sépare les  $N(k)$  points en  $\frac{N(k)}{2}$  points pairs et  $\frac{N(k)}{2}$  points impairs.

$$x_1(n) = x(2n) \text{ et } x_2(n) = x(2n + 1)$$

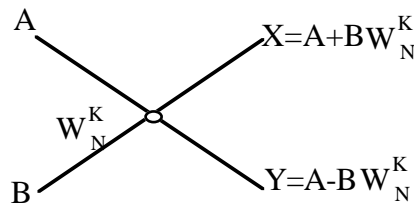
La TFD s'écrit alors :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n + 1) W_N^{(2N+1)k}$$

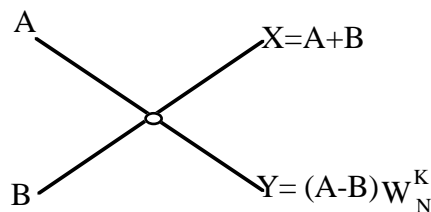
$$\text{or } W_N^2 = \left( e^{-\frac{j2\pi}{N}} \right)^2 = e^{-\frac{j2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

d'où :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^{nk}$$



**Fig. 48.** Élément du treillis de l'algorithme à dédoublement en temps



**Fig. 49.** Élément du treillis de l'algorithme à dédoublement en fréquence

Il suffit alors de calculer :

$$X_1(k) = \sum_0^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^{nk} \quad \text{et} \quad X_2(k) = \sum_0^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^{nk}$$

ce qui ne nécessite que 2 fois le calcul sur  $\frac{N}{2}$  points, donc  $\frac{N^2}{2}$  multiplications (au lieu de  $N^2$ ), d'où un gain de 50% en temps de calcul.

### 6.7.2 Dédoublément en temps

On procède de la manière ci-dessus, en réitérant la décomposition en séquences paire et impaire pour chaque nouvelle TFD.

On complète la connaissance de  $X(k)$  pour les valeurs  $\frac{N}{2} \leq k \leq N-1$  de la manière suivante :

$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k X_2(k) & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ X_1\left(k - \frac{N}{2}\right) + W_N^k X_2\left(k - \frac{N}{2}\right) & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1 \end{cases}$$

$$X(k) = X_1(k) + e^{-2\pi j \frac{k}{N}} X_2(k)$$

$$\begin{aligned} X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1(k) + e^{-2\pi j \left(\frac{k}{N} + \frac{N}{2N}\right)} X_2(k) \\ &= X_1(k) - e^{-2\pi j \frac{k}{N}} X_2(k) \end{aligned}$$

Finalement, il reste à calculer des TFD sur deux points, ce qui donne :

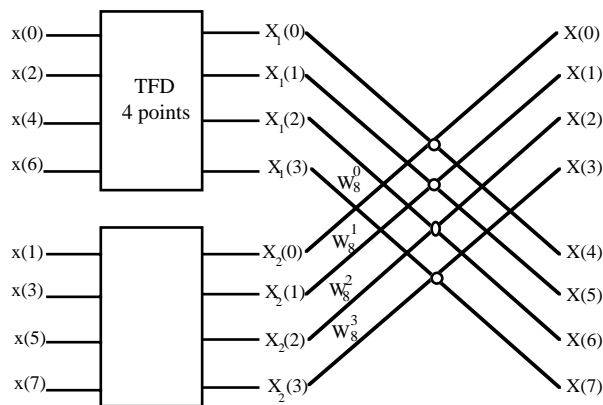
$$X(0) = x(0) + x(1)$$

$$X(1) = x(0) - x(1)$$

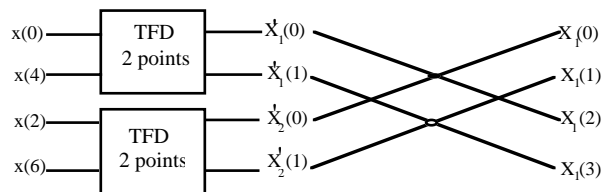
Les schémas suivants montrent comment l'algorithme est utilisé pour calculer la TFD sur 8 points.

$$X(0) = X_1(0) + X_2(0)W_8^0 \quad \text{etc...}$$

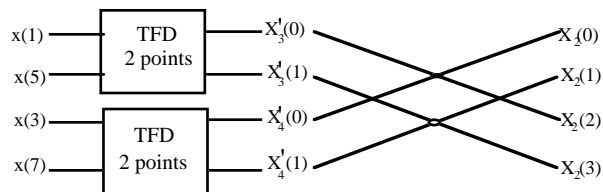




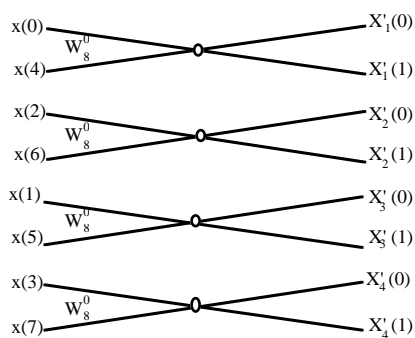
**Fig. 50.** TFD sur 8 points = 2 TFD sur 4 points



**Fig. 51.**



**Fig. 52.** TFD sur 8 points = 4 TFD sur 2 points



**Fig. 53.** Bloc de combinaison

### 6.7.3 Dédoublément en fréquence

Au lieu de grouper termes pairs et impairs en fonction de  $k$ , on divise  $x(k)$  en deux séquences de  $\frac{N}{2}$  termes : les  $\frac{N}{2}$  premiers et les suivants.

On a alors :

$$\begin{cases} x_1(n) = x(n) & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ x_2(n) = x\left(n + \frac{N}{2}\right) & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_0^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_0^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_N^{nk} + \sum_0^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_N^{(n+\frac{N}{2})k} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_N^{nk} + W_N^{\frac{Nk}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_N^{nk} \end{aligned}$$

Or :  $W_N^{\frac{Nk}{2}} = e^{-jk\pi}$

On sépare  $X(k)$  en partie paire et impaire :

$$X(2k) = \sum_0^{\frac{N}{2}-1} (x_1(n) + x_2(n)) W_N^{2nk}$$

$$X(2k+1) = \sum_0^{\frac{N}{2}-1} (x_1(n) - x_2(n)) W_N^{n(2k+1)}$$

Soit :

$$X(2k) = \sum_0^{\frac{N}{2}-1} (x_1(n) + x_2(n)) W_{N/2}^{nk}$$

$$X(2k+1) = \sum_0^{\frac{N}{2}-1} [(x_1(n) - x_2(n)) W_N^n] W_{N/2}^{nk}$$

On est ramené au calcul de la TFD de  $x_1(n) + x_2(n)$  et  $[(x_1(n) - x_2(n)) W_N^n]$  sur  $\frac{N}{2}$  points. On réitère le processus.

Sur les schémas suivants, on donne la structure de l'algorithme appliqué à 8 points.

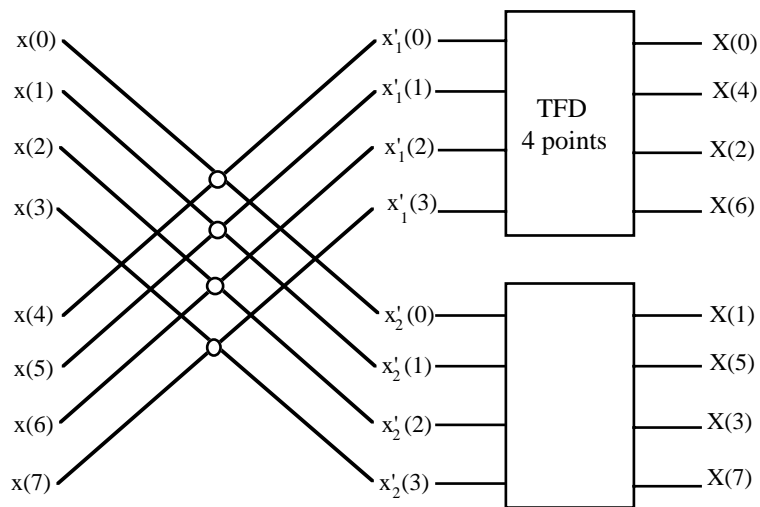


Fig. 54. Schéma 1

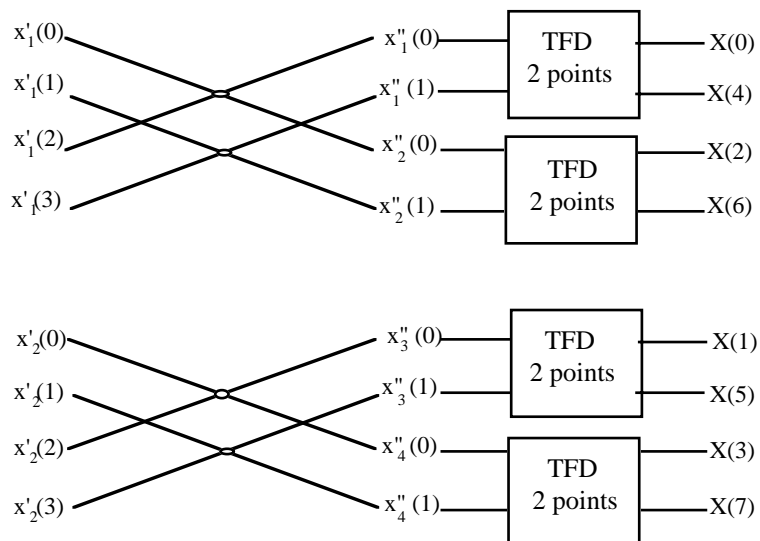


Fig. 55. Schéma 2

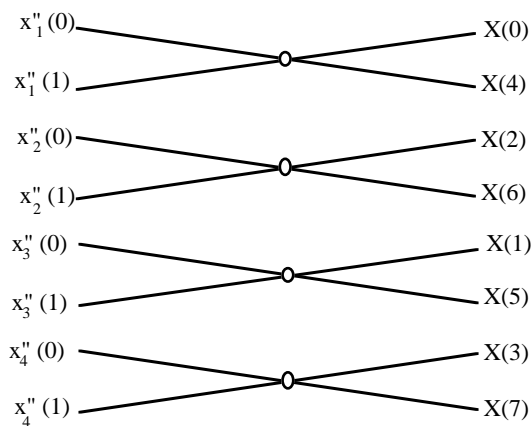


Fig. 56. Schéma 3

### 6.7.4 Calcul de la transformée inverse

On a vu que la transformée inverse différait de la TDF uniquement par un coefficient  $N$ . On pourra donc utiliser la FFT (Fast Fourier Transform) indifféremment pour la transformée ou son inverse.

### 6.7.5 Autres algorithmes

De nombreux perfectionnements ont vu le jour afin de réduire les temps de calcul et d'améliorer la souplesse d'utilisation de l'algorithme. Ainsi, il est possible de calculer une transformée de Fourier rapide sur  $N$  points non forcément multiple à 2.

L'algorithme de Winograd permet de diminuer d'environ 5 fois le nombre de multiplications de l'algorithme de Cooley et Tukey. Des transformées de Fourier rapide multidimensionnelles existent. Elles sont toutefois basées sur la séparabilité de la transformée de Fourier.

# Chapitre 7

## Synthèse de filtres récurrents

### 7.1 Principe

Il s'agit ici de déterminer les coefficients de l'équation récurrente décrivant un filtre discret en s'étant fixé les performances du filtre, dans le domaine des fréquences.

$$H(e^{j2\pi\nu T_0}) = |H(e^{j2\pi\nu T_0})| e^{j\phi(\nu)}$$

$$\begin{cases} |H(e^{j2\pi\nu T_0})|^2 = |H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j2\pi\nu T_0}} \\ \phi(\nu) = \text{Arctg} \left[ \frac{\Im H(z)}{\Re H(z)} \right]_{z=e^{j2\pi\nu T_0}} \end{cases}$$

$H(e^{j2\pi\nu T_0})$  doit s'inscrire dans le gabarit qu'on s'est fixé, c'est à dire doit tenir compte:

- de la bande passante
- des fréquences de coupure
- des pentes de coupure
- des ondulations dans la bande passante
- du temps de propagation de groupe
- ...

Rappel :

le temps de propagation de groupe est la variation de la phase par rapport à la fréquence,  
 $\tau = -\frac{d\phi(\nu)}{d\nu}$

Remarque :

les filtres synthétisés doivent être stables; les pôles de  $H(z)$  devront donc être à l'intérieur du cercle unité.

## 7.2 Méthode de l'invariance impulsionnelle

### 7.2.1 Principe

Un filtre analogique de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , échantillonné en sortie est équivalent au filtre discret de fonction de transfert :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(nT_0)z^{-n}$$

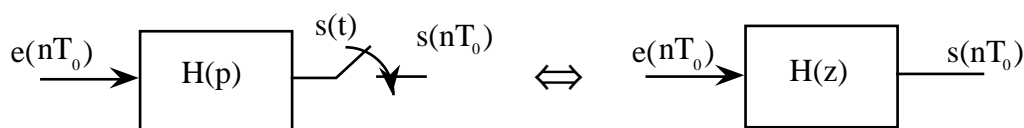


Fig. 57.

$H(z)$  se calcule à partir de  $H(p)$  par la formule :

$$H(z) = \sum_{\text{pôles de } H(p)} \text{Res} \left[ \frac{H(p)}{1 - e^{pT_0} z^{-1}} \right] \quad (7.1)$$

La méthode de l'invariance impulsionnelle consiste à déterminer le filtre discret de fonction de transfert  $H(z)$  ayant comme réponse impulsionnelle l'échantillonnée de la réponse impulsionnelle de  $H(p)$ .

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(nT_0)z^{-n}$$

On peut calculer  $H(z)$  par la formule ((7.1)), ou plus simplement en utilisant les relations entre transformées de Laplace et en  $z$  pour les systèmes du premier et du second ordres.

$H(p)$  est alors décomposé en éléments simples du premier et second ordres :

$$H(p) = \sum_i \frac{A_i}{p+p_i} + \sum_j \frac{B_j p + C_j}{p^2 + b_j p + c_j}$$

$H(p)$	$H(z)$
$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT_0}z^{-1}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1 - e^{-aT_0} z^{-1} \cos \omega T_0}{1 - 2e^{-aT_0} z^{-1} \cos \omega T_0 + e^{-2aT_0} z^{-2}}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\frac{e^{-aT_0} z^{-1} \sin \omega T_0}{1 - 2e^{-aT_0} z^{-1} \cos \omega T_0 + e^{-2aT_0} z^{-2}}$

### Rappel

Les fonctions de transfert des filtres analogiques polynômiaux - Butterworth, Tchebychev, Bessel, Causer, etc...- sont données pour des fréquences de coupure normalisées et pour des filtres passe-bas.

$$H(p) \text{ est tel que : } \frac{|H(j.1)|}{|H(j.0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pour passer au filtre passe-bas de pulsation de coupure  $\omega_c$ , il faut remplacer  $p$  par  $\frac{p}{\omega_c}$ .

Pour passer du passe-bas au passe-bande,  $p$  est remplacé par :  $\frac{1}{B} \left( p + \frac{\omega_0^2}{p} \right)$

avec :

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$$

$\omega_1$  : pulsation de coupure basse

$\omega_2$  : pulsation de coupure haute

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

Le filtre passe bande est symétrique si  $B \ll \omega_0$ .

## 7.2.2 Limites de la méthode

Soit  $H(\nu)$  la réponse en fréquence du filtre analogique.  $H(e^{j2\pi\nu T_0})$  est celle du filtre discret, on sait que :

$$H(e^{j2\pi\nu T_0}) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(\nu - n\nu_0) \quad \text{avec} \quad \nu_0 = \frac{1}{T_0}$$

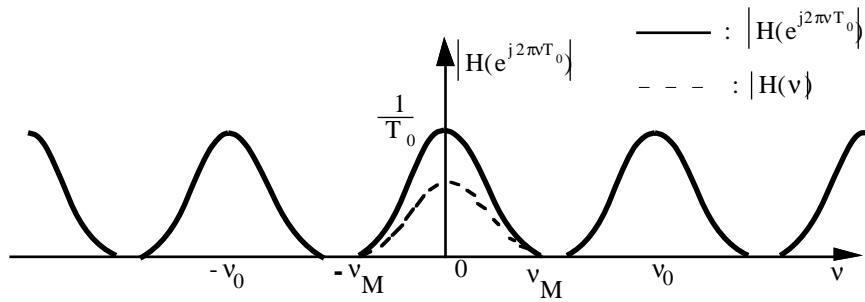


Fig. 58.

La méthode n'est valable que si  $\nu_0 \geq 2\nu_M$

Dans le cas contraire (si  $|H(\frac{\nu_0}{2})|$  n'est pas négligeable), il y a repliement de spectre.

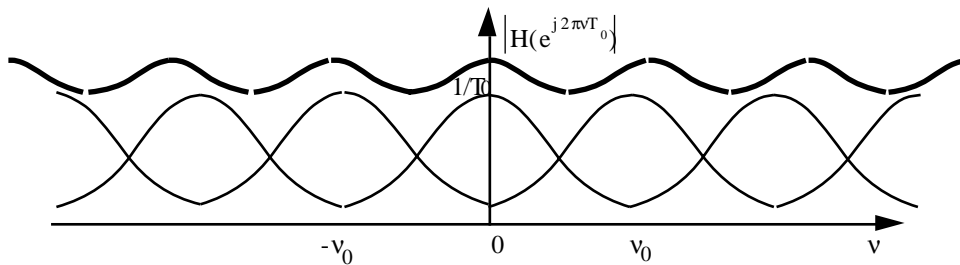


Fig. 59.

Le filtre discret n'a pas la réponse en fréquence désirée, bien qu'il ait la même réponse impulsionnelle que le filtre analogique.

## 7.3 Synthèse par la transformation bilinéaire

### 7.3.1 Introduction

Le filtre passe-bas analogique du premier ordre est défini :

- par une fonction de transfert du type :  $H(p) = \frac{a}{p + b}$
- mais aussi par l'équation différentielle :  $s'(t) + bs(t) = ae(t)$

On peut écrire :

$$s(t) = \int_{t_0}^t s(u) du + s(t_0)$$

ce qui reste valable pour  $t_0 = (k - 1)T_0$  et  $t = kT_0$  :



$$s(kT_0) = \int_{(k-1)T_0}^{kT_0} s(u) du + s[(k-1)T_0]$$

L'approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes donne :

$$\int_{(k-1)T_0}^{kT_0} s(u) du \approx T_0 s[(k-1)T_0] + \frac{T_0}{2} [s(kT_0) - s[(k-1)T_0]]$$

En changeant de notation  $s(kT_0) \rightarrow s(k)$  (pour simplifier), il vient :

$$s(k) \approx s(k-1) + \frac{T_0}{2} [s(k) + s(k-1)]$$

Et, en utilisant l'équation différentielle initiale :

$$s(k) - s(k-1) = \frac{T_0}{2} [-bs(k) + ae(k) - bs(k-1) + ae(k-1)]$$

Par transformation en  $z$  :

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{a}{\frac{2}{T_0} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + b}$$

En comparant  $F(z)$  et  $H(p)$ , il vient :

$$F(z) = H(p) \Big|_{p = \frac{2}{T_0} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

*Conclusion :*

En remplaçant  $p$  par  $\frac{2}{T_0} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  dans  $H(p)$ , nous trouvons un filtre "équivalent" discret. Cette méthode se généralise à l'ensemble des filtres ; elle est appelée *méthode de la transformation bilinéaire*.

### 7.3.2 Réponse en fréquence

La réponse en fréquence de  $H(p)$  correspond à  $p = j\omega_A$

$$F(z) = H\left(\frac{2}{T_0} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \quad p = \frac{2}{T_0} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow z = \frac{1 + \frac{T_0}{2} p}{1 - \frac{T_0}{2} p}$$

Donc pour  $p = j\omega_A$

$$z = \frac{1 + \frac{T_0}{2} j\omega_A}{1 - \frac{T_0}{2} j\omega_A}$$

Soit :

$$|z| = \sqrt{\frac{1+T_0^2/4}{1+T_0^2/4}} = 1$$

On peut donc poser  $z = e^{j\omega_D T_0}$  ( $\omega_D$  : pulsation dans le domaine discret).

et donc :

$$\frac{1 + \frac{T_0}{2} j\omega_A}{1 - \frac{T_0}{2} j\omega_A} = e^{j\omega_D T_0}$$

On déduit :

$$\omega_D = \frac{2}{T_0} \operatorname{Arctg} \frac{\omega_A T_0}{2}$$

$$\omega_A = \frac{2}{T_0} \operatorname{Tg} \frac{\omega_D T_0}{2}$$

Il n'y a pas égalité entre pulsation analogique et pulsation discrète. La relation entre les deux n'est pas non plus linéaire.

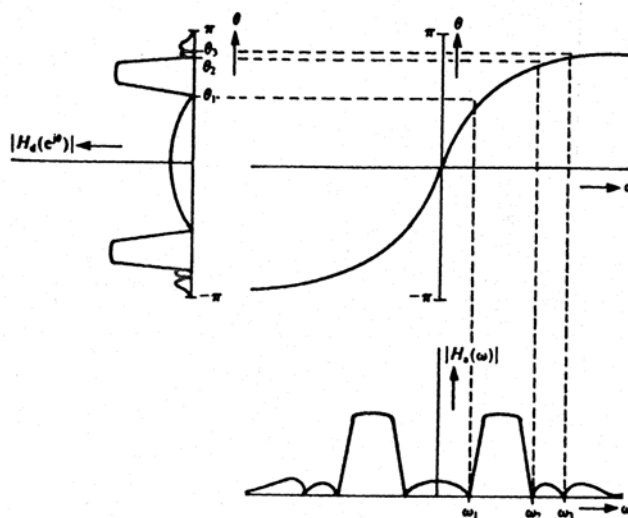


Fig. 60. Illustration de la transformation bilinéaire

On dit qu'il y a distorsion en fréquence.

Le filtre discret obtenu par la transformation bilinéaire d'un filtre analogique n'a donc pas la même réponse en fréquence que ce filtre analogique.

Lors de la synthèse d'un filtre discret par cette méthode, il faut tenir compte de cette distorsion pour déterminer le filtre analogique, qui par transformation bilinéaire, donnera le filtre discret cherché.

### Exemple

Synthèse du filtre discret d'ordre 1, de fréquence de coupure 40 Hz, de fréquence d'échantillonnage 200 Hz.

Fréquence de coupure analogique  $\nu_{AC}$  correspondante :

$$2\pi\nu_{AC} = \omega_{AC} = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{2\pi\nu_{DC} T_0}{2} \quad \text{soit } \nu_{AC} = 46 \text{ Hz}$$

$$\omega_{AC} = 291 \text{ rad/s}$$

Fonction de transfert du filtre analogique passe-bas premier ordre :

$$H(p) = \frac{1}{\frac{p}{\omega_{AC}} + 1}$$

Donc :

$$F(z) = H\left(\frac{2}{T_0} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \quad F(z) = \frac{1+z^{-1}}{2,38-0,38z^{-1}}$$

Par construction, nous avons bien :  $|F(e^{j2\pi \cdot 40 \cdot T_0})|_{dB} = |H(j \cdot 291)|_{dB} = -3dB$

## 7.3.3 Intérêts de la transformation bilinéaire

Pas de repliement de spectre

$$\omega_A = \frac{2}{T_0} \operatorname{Tg} \frac{\omega_D T_0}{2}$$

Lorsque

$$\omega_A \rightarrow \infty, \quad \frac{\omega_D T_0}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{donc } \nu_D \rightarrow \frac{\nu_0}{2}$$

$$H(j\omega_A) = F(e^{j2\pi\nu_D T_0})$$

$\lim_{\omega_A \rightarrow \infty} |H(j\omega_A)| = 0$  (passe-bas)

alors

$$\lim_{\nu_D \rightarrow \frac{\nu_0}{2}} |F(e^{j2\pi\nu_D T_0})| = 0$$

Exemple :

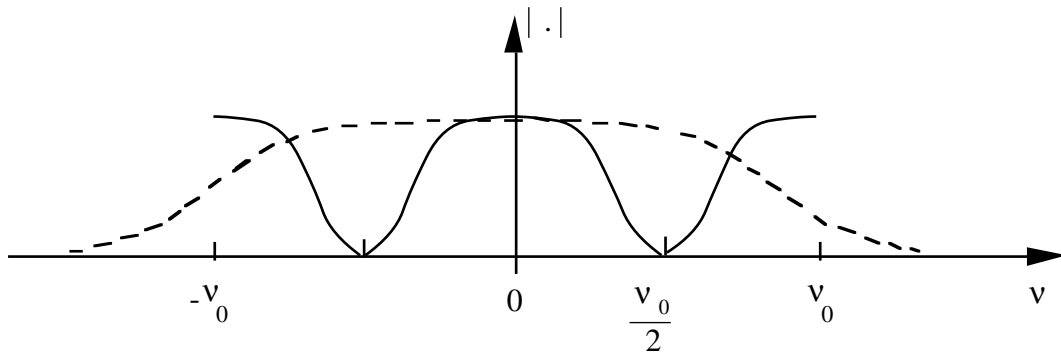


Fig. 61. filtre analogique (trait discontinu) et filtre discret (trait continu)

## Stabilité

La transformation bilinéaire (ou transformation homographique) est une transformation conforme dans le plan complexe qui a les propriétés suivantes :

1. elle transforme l'axe imaginaire en le cercle unité, a déjà été démontré
2. elle transforme le demi plan de gauche en l'intérieur du cercle unité,

$$z = \frac{1 + \frac{T_0}{2}p}{1 - \frac{T_0}{2}p}$$

$$\text{si } p = \sigma + j\omega_A, \quad \sigma < 0$$

$$z = \frac{\left(1 + \sigma \frac{T_0}{2}\right) + j\omega_A \frac{T_0}{2}}{\left(1 - \sigma \frac{T_0}{2}\right) - j\omega_A \frac{T_0}{2}}$$

$$\Rightarrow |z|^2 = \frac{\left(1 + \sigma \frac{T_0}{2}\right)^2 + \left(\omega_A \frac{T_0}{2}\right)^2}{\left(1 - \sigma \frac{T_0}{2}\right)^2 + \left(\omega_A \frac{T_0}{2}\right)^2}$$

$$\sigma < 0 \quad \Rightarrow \quad |z|^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| < 1$$

3. elle transforme une fraction rationnelle de  $p$  en une fraction rationnelle de  $z$ .

**Conclusion** :

A un filtre analogique stable correspond, par la transformation bilinéaire, un filtre discret qui est stable.

**Remarque** :

La distorsion en fréquence s'accompagne d'une modification du temps de propagation de groupe.

$$\omega_A = \frac{2}{T_0} \operatorname{Tg} \left[ \frac{\omega_D T_0}{2} \right] \quad \Rightarrow \quad d\omega_A = \left( 1 + \operatorname{Tg}^2 \left[ \frac{\omega_D T_0}{2} \right] \right) d\omega_D = \left[ 1 + \left( \frac{\omega_A T_0}{2} \right)^2 \right] d\omega_D$$

$$\tau_D = \frac{d\varphi}{d\omega_D} = \left[ 1 + \left( \frac{\omega_A T_0}{2} \right)^2 \right] \frac{d\varphi}{d\omega_A}$$

$\Rightarrow$

$$\tau_D = \left[ 1 + \left( \frac{\omega_A T_0}{2} \right)^2 \right] \tau_A$$

Un filtre analogique qui a, dans un certain domaine de fréquences, un temps de propagation de groupe constant (une phase linéaire) devient, par la transformation bilinéaire, un filtre discret qui n'a plus cette propriété.

## 7.4 Synthèse par une méthode d'optimisation

Cette méthode est utilisée pour la synthèse d'un filtre discret pour lequel on n'a pas de modèle continu a priori. On utilise alors, une méthode d'optimisation sur ordinateur.

L'idée est de définir une erreur tolérée entre la réponse fréquentielle souhaitée  $H_s(e^{j\alpha})$  et la version approchée  $H(e^{j\alpha})$  caractérisée par la fonction de transfert  $H(z)$  :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j z^{-j}}$$

L'algorithme utilisé peut être décrit de la façon suivante :

1. Partir de valeurs  $a_i$  et  $b_j$  grossièrement estimées
2. Déterminer l'erreur  $\varepsilon$  : erreur commise en comparant  $H_s(e^{j\alpha})$  et  $H(e^{j\alpha})$  à des fréquences  $\alpha_i$  particulières (choisies arbitrairement) :

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^K \omega(e^{j\alpha_k}) \left[ |H(e^{j\alpha_k})| - |H_s(e^{j\alpha_k})| \right]^{2p}$$

$\omega(e^{j\alpha_k})$  : Fonction de pondération indépendante de  $\alpha$  (utilisée pour pondérer l'erreur plus fortement à certaines fréquences).

$p$  : Constante choisie.

Plusieurs algorithmes permettent la détermination des coefficients  $a_i$  et  $b_j$  qui minimisent l'erreur  $\varepsilon$ ; nous citerons, par exemple, l'algorithme de Fletcher- Powell qui procède de façon itérative (variation par étape des  $a_i$  et  $b_j$  tels que  $\varepsilon$  décroisse et atteint un minimum).

Lorsque  $\omega(e^{j\alpha_k}) = 1 \forall \alpha_k$  et  $p = 1$ , on parle de minimisation de l'erreur quadratique moyenne EQM.

# Chapitre 8

## Synthèse des filtres non récurrents

Ces filtres présentent l'avantage d'être toujours stables. Ils peuvent être non causaux; dans ce cas, ils devront fonctionner en temps différé après mise en mémoire.

### 8.1 Méthode de la fenêtre

Elle consiste à approcher la réponse fréquentielle d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie par celle d'un filtre non récurrent.

#### 8.1.1 Méthode

Soit  $H(e^{j\alpha})$  la réponse fréquentielle désirée. Par transformation inverse :

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\alpha}) e^{jk\alpha} d\alpha$$

La réponse du filtre à une entrée quelconque est alors :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k) h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(n-k) h(k)$$

La sommation infinie, est approchée en tronquant la réponse impulsionnelle entre  $k = -N$  et  $k = +N$  par multiplication par une fenêtre  $w(k)$  telle que :

$$w(k) = 0 \quad \forall k, |k| > N$$

On obtient une nouvelle réponse impulsionnelle :  $h_T(k) = h(k) \cdot w(k)$ .

Donc :

$$s(n) = \sum_{k=-N}^N h_T(k) e(n-k) = \sum_{k=-N}^N a_k e(n-k)$$

Le filtre obtenu est non causal et sa réponse fréquentielle est :

$$H_T(e^{j\alpha}) = \sum_{k=-N}^N h(k) w(k) e^{-jk\alpha}$$

Cette réponse peut également être calculée par la transformation en  $z$  d'un produit de deux signaux discrets  $h(k)$  et  $w(k)$ .

$$H_T(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(c)} H(u) W\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}$$

en posant :  $z = e^{j\alpha}$  et en intégrant sur le cercle unité :  $u = e^{j\theta}$  ;  $\frac{du}{u} = j d\theta$

$$H_T(e^{j\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\theta}) W(e^{j(\alpha-\theta)}) d\theta$$

C'est la transformée de Fourier du produit de deux signaux discrets. Elle est notée, par analogie avec le produit de convolution classique :

$$H_T(e^{j\alpha}) = [h(k) \cdot w(k)] = H(e^{j\alpha}) \star W(e^{j\alpha})$$

La réponse fréquentielle est donc différente.

Le fait de tronquer la réponse impulsionnelle  $h(k)$  se traduit par l'apparition d'oscillations sur la réponse fréquentielle  $H_T(e^{j\alpha})$ . En augmentant  $N$ ,  $H_T(e^{j\alpha})$  se rapproche de  $H(e^{j\alpha})$  mais l'amplitude des oscillations ne diminue pas.

Remarque : Signaux du type  $h(kT_0)$

$$\alpha \rightarrow 2\pi\nu T_0$$

$$H_T(e^{j2\pi\nu T_0}) = H_T(\nu) = \sum_{k=-N}^N h(kT_0) w(kT_0) e^{-j2\pi k\nu T_0}$$

D'autres fenêtres sont utilisées pour diminuer ces oscillations, leurs caractéristiques déjà vues dans le chapitre 6, montrent qu'elles sont plus ou moins performantes suivant le type de filtre à réaliser.



### 8.1.2 Exemple

Approximation du filtre passe-bas idéal :

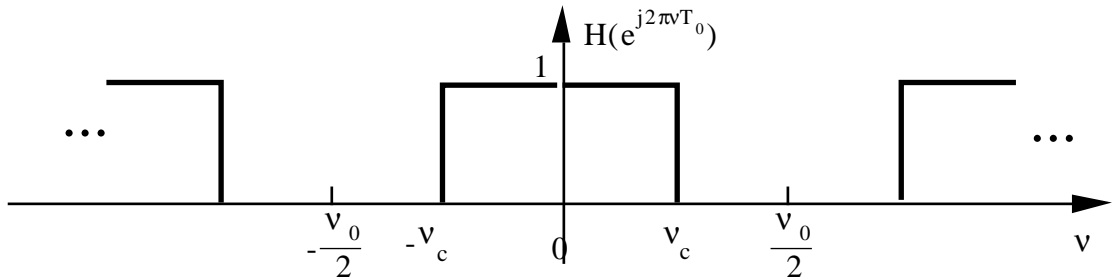


Fig. 62. Filtre passe-bas idéal

$$h(k) = \frac{1}{\nu_0} \int_{-\frac{\nu_0}{2}}^{+\frac{\nu_0}{2}} H(e^{j2\pi\nu T_0}) e^{jk2\pi\nu T_0} d\nu$$

$$= T_0 \int_{-\nu_c}^{+\nu_c} e^{j2\pi\nu T_0} d\nu ; h(k) = \frac{1}{k\pi} \sin(2\pi k \nu_c T_0)$$

$$H_T(e^{j2\pi\nu T_0}) = \sum_{k=-N}^{+N} h(k) e^{-j2\pi k \nu T_0}$$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{k\pi} \sin(2\pi k \nu_c T_0) e^{-j2\pi k \nu T_0}$$

Il s'agit en fait d'un développement en série de Fourier tronqué et le cas de figure est le même que lors d'une recombinaison partielle des harmoniques d'un signal périodique :

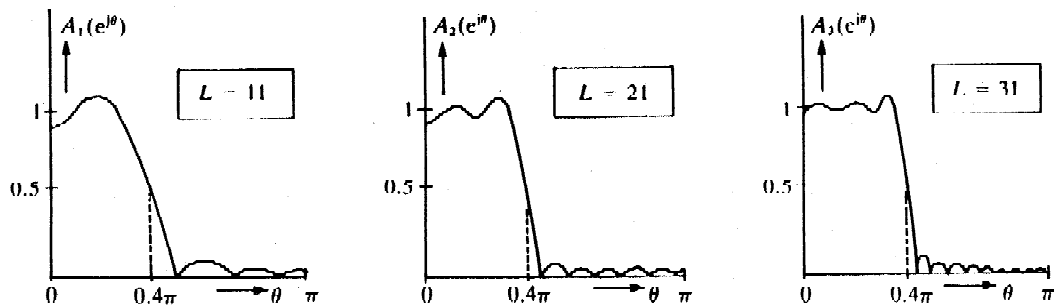


Fig. 63. Approximations du filtre passe-bas

## 8.2 Synthèse de filtres à phase linéaire

### 8.2.1 Définition - Intérêt

Si  $H(e^{j\alpha})$  est la réponse en fréquence du filtre,  $H(e^{j\alpha}) = A(\alpha) \cdot e^{j\Phi(\alpha)}$ . Le filtre est à phase linéaire si  $\Phi(\alpha) = -a\alpha$   $a \in \mathbb{R}$ .

Intérêt : Exemple dans le cas continu

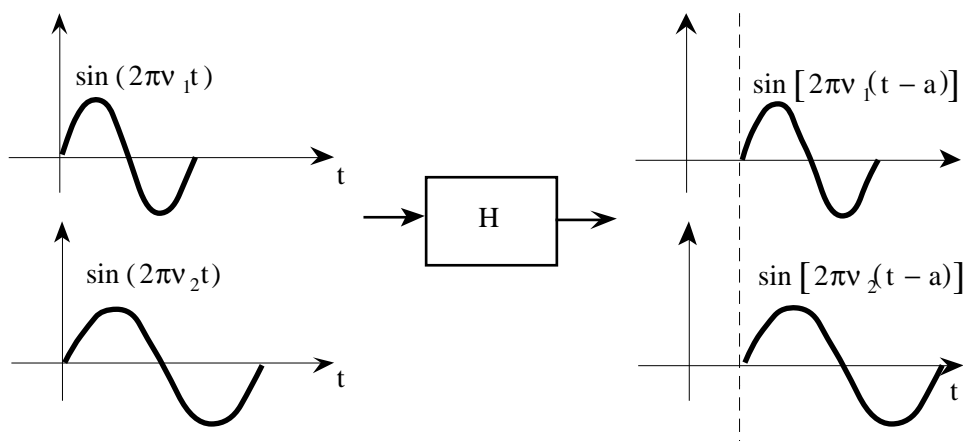


Fig. 64. Filtre à phase linéaire

### 8.2.2 Filtres à phase nulle

Considérons un filtre à réponse impulsionnelle réelle  $h(n)$ , et une réponse fréquentielle  $H(e^{j\alpha})$ .

Nous avons déjà montré que la réponse fréquentielle d'un filtre réel vérifiait :

$$|H(e^{j\alpha})| = |H(e^{-j\alpha})|$$

$$\text{Arg}[H(e^{j\alpha})] = -\text{Arg}[H(e^{-j\alpha})]$$

La phase nulle correspond donc à  $H(e^{j\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-jn\alpha}$  réel. Ceci est obtenu pour :

$$h(n) = h(-n); \quad h(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} H(e^{j\alpha}) \cos n\alpha \, d\alpha$$

*Un filtre à phase nulle est donc non causal, de réponse fréquentielle réelle et paire en  $\alpha$ .*

Le filtre  $H(e^{j\alpha})$  est approché par un filtre non récursif par la méthode de la fenêtre. Soit  $h_T$  la réponse du filtre sur  $N$  points :

$$h_T = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} h(n) w(n) \delta_n = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} h_T(n) \delta_n$$

La réponse de ce filtre est également réelle si  $w(n) = w(-n)$ .

### 8.2.3 Application à la détermination d'un filtre causal à phase linéaire

Considérons le filtre non récursif de réponse impulsionnelle réelle  $h_T(n)$  telle que :

$$\begin{cases} h_T(n) = h_T(-n) & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ h_T(n) = 0 & |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

et

$$H_T(e^{j\alpha}) \geq 0$$

Pour rendre ce filtre causal, on convolue sa réponse impulsionnelle par la distribution  $\delta_{\frac{N-1}{2}}$ . Soit  $h_c$  la réponse impulsionnelle obtenue:

$$h_c = h_T \star \delta_{\frac{N-1}{2}}$$

$$H_c(e^{j\alpha}) = H_T(e^{j\alpha}) e^{-j(\frac{N-1}{2})\alpha} \Rightarrow \begin{cases} |H_c(e^{j\alpha})| = H_T(e^{j\alpha}) \\ \text{Arg}[H_c(e^{j\alpha})] = -\frac{N-1}{2}\alpha \end{cases}$$

La phase est donc linéaire. Et par conséquent, un filtre causal à phase linéaire est caractérisé par:

$$H(e^{j\alpha}) = |H(e^{j\alpha})| e^{-ja\alpha} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \frac{N-1}{2} \\ h(k) = h(N-1-k) \end{cases}$$

#### Exemples

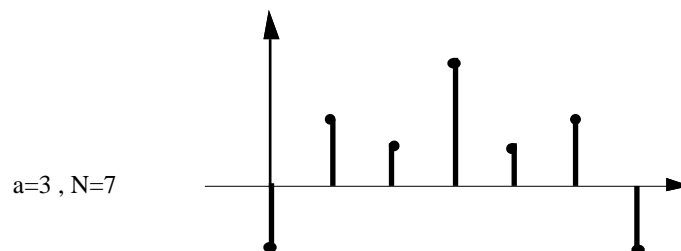


Fig. 65.

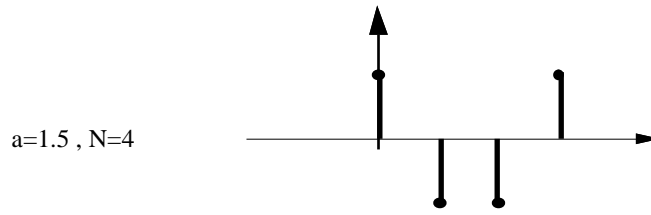


Fig. 66.

Remarque

En prenant  $\phi(\alpha) = -a\alpha - \frac{\pi}{2}$  (phase non linéaire mais temps de propagation de groupe constant). La réponse impulsionnelle du filtre va vérifier :

$$\begin{cases} a = \frac{N-1}{2} \\ h(k) = -h(N-1-k) \end{cases}$$

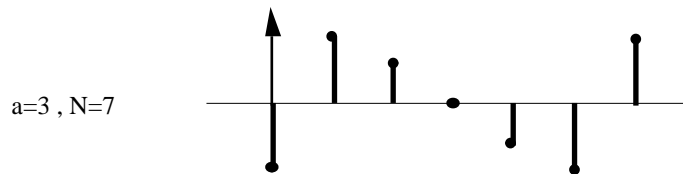


Fig. 67.

### 8.2.4 Relation entre la réponse impulsionnelle et filtrage réalisé

Nous allons analyser la forme de la réponse fréquentielle en fonction de l'allure de la réponse impulsionnelle de filtre à temps de propagation de groupe constant.

- Nombre d'échantillons  $N$  de la réponse impulsionnelle impair ( $M = \frac{N-1}{2}$ )

1. Réponse impulsionnelle symétrique

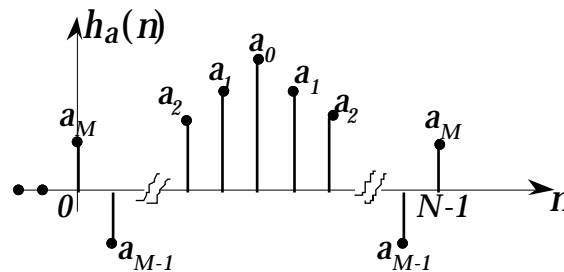


Fig. 68.

$$h_a = a_M \delta_0 + a_{M-1} \delta_1 + \dots + a_1 \delta_{M-1} + a_0 \delta_M + a_1 \delta_{M+1} + \dots + a_{M-1} \delta_{N-2} + a_M \delta_{N-1}$$

la réponse fréquentielle  $H_a(e^{j\alpha})$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} H_a(e^{j\alpha}) &= a_M + a_{M-1}e^{-j\alpha} + \dots + a_1e^{-j(M-1)\alpha} + a_0e^{-jM\alpha} + a_1e^{-j(M+1)\alpha} + \dots + \\ &\quad a_{M-1}e^{-j(N-2)\alpha} + a_Me^{-j(N-1)\alpha} \\ &= e^{-jM\alpha} \left[ a_0 + \sum_{k=1}^M a_k (e^{jk\alpha} + e^{-jk\alpha}) \right] \end{aligned}$$

où encore :

$$H_a(e^{j\alpha}) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\alpha} \left[ a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} a_k \cos k\alpha \right]$$

## 2. Réponse impulsionnelle anti-symétrique

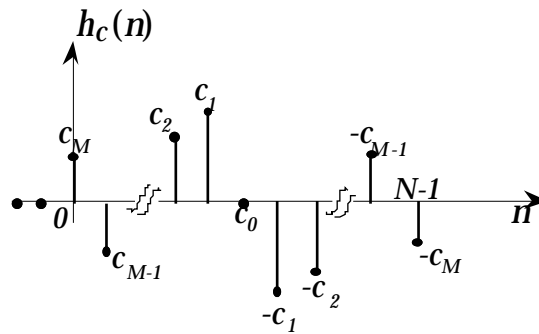


Fig. 69.

On refait les mêmes calculs que dans le cas précédent, et on arrive à :

$$H_c(e^{j\alpha}) = 2je^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\alpha} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} c_k \sin k\alpha$$

*Remarque :*

La réponse fréquentielle est imaginaire pure. De plus

$$H_c(e^{j\alpha}) = 0 \text{ pour } \alpha = 0 \text{ et pour } \alpha = \pi$$

Ce qui signifie qu'avec une telle réponse impulsionnelle on ne peut synthétiser que des filtres **passé bande**.

- Nombre d'échantillons  $N$  de la réponse impulsionnelle impair ( $M = \frac{N}{2}$ )

1. Réponse impulsionnelle symétrique

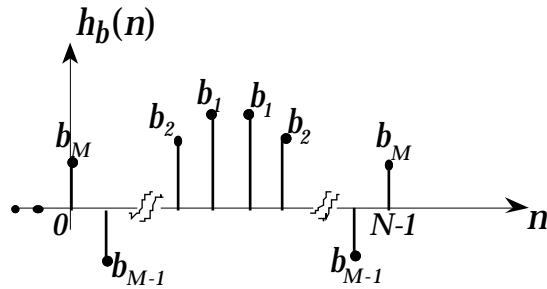


Fig. 68.

Le calcul de la réponse fréquentielle donne :

$$H_b(e^{j\alpha}) = 2e^{-j(\frac{N-1}{2})\alpha} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos(k - \frac{1}{2})\alpha$$

(le point de symétrie se situe exactement à mi-chemin entre deux échantillons).

*Remarque :*

$$H_b(e^{j\alpha}) = 0 \text{ pour } \alpha = \pi$$

Ce qui signifie qu'avec une telle réponse impulsionnelle on ne peut pas synthétiser des filtres **passé haut**.

2. Réponse impulsionnelle anti-symétrique

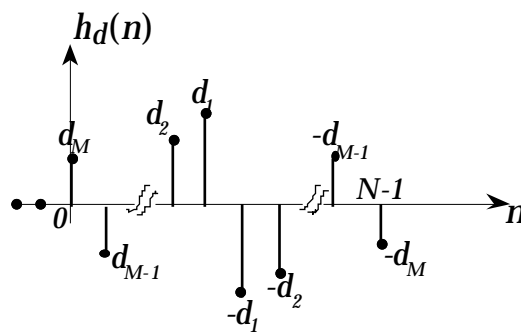


Fig. 69.

Le calcul de la réponse fréquentielle donne :

$$H_d(e^{j\alpha}) = 2je^{-j(\frac{N-1}{2})\alpha} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} c_k \sin(k - \frac{1}{2})\alpha$$

Remarque :

La réponse fréquentielle est imaginaire pure. De plus

$$H_d(e^{j\alpha}) = 0 \text{ pour } \alpha = 0$$

Ce qui signifie qu'avec une telle réponse impulsionnelle il est impossible de synthétiser des filtres **passé bas**.

## 8.3 Application de la TFD à la synthèse de filtres non récurrents

### 8.3.1 Méthode de l'échantillonnage en fréquence

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \left[ \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi k \frac{n}{N}} z^{-n} \right] \end{aligned}$$

Donc :

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(k) \cdot \frac{1 - e^{+j2\pi k} z^{-N}}{1 - e^{j2\pi \frac{k}{N}} z^{-1}} \text{ or } e^{j2\pi k} = 1$$

$$H(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j2\pi \frac{k}{N}} z^{-1}}$$

Connaissant la réponse fréquentielle du filtre, on détermine sa structure à partir de sa TFD.

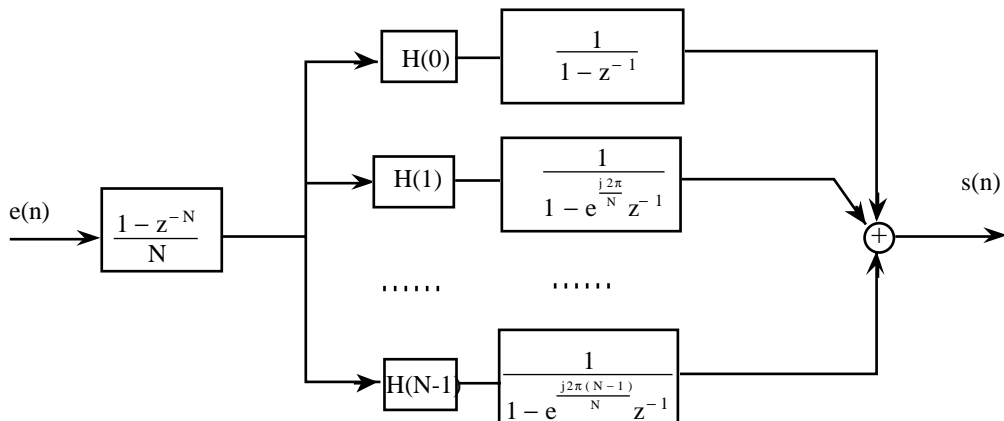


Fig. 68.

Remarque : réponse en fréquence de  $H_N(z) = 1 - z^{-N}$

$H_N(e^{j\alpha}) = 1 - e^{-jN\alpha}$  s'annule pour  $\alpha = 2k\frac{\pi}{N}$ . Ce filtre est appelé filtre en peigne.

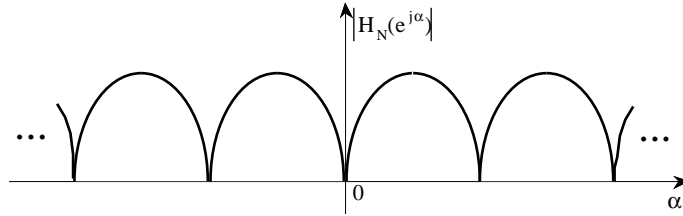


Fig. 69. Réponse fréquentielle d'un filtre en peigne

### 8.3.2 Cas particulier : filtre réel

On considère un filtre de réponse impulsionnelle  $h(n) \in \mathbb{R}$ .

On peut reprendre le calcul précédent en sommant depuis  $-\frac{N}{2}$  à  $\frac{N}{2} - 1$  ( $N$  échantillons et  $N$  pair, par exemple) :

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{-\frac{N}{2}}^{N/2-1} H(k) e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$$

donc :

$$H(z) = \frac{1}{N}(1 - z^{-N}) \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}}$$

pour un filtre réel :  $H(-k) = H^*(k)$ . Dans la sommation apparaissent des termes conjugués qui se regroupent.

$$H(z) = \frac{1}{N}(1 - z^{-N}) \left[ \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{a_k + b_k z^{-1}}{1 - 2 \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right) z^{-1} + z^{-2}} + \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + \frac{H\left(\frac{N}{2}\right)}{1 + z^{-1}} \right]$$

avec :

$$a_k = H(k) + H^*(k)$$

$$b_k = - \left( H^*(k) e^{j2\pi \frac{k}{N}} + H(k) e^{-j2\pi \frac{k}{N}} \right)$$

Le filtre est donc constitué d'un filtre en peigne suivi de deux filtres du premier ordre correspondant aux échantillons  $H(0)$  et  $H\left(\frac{N}{2}\right)$  et d'une batterie de filtres du deuxième ordre à coefficients réels en parallèle :



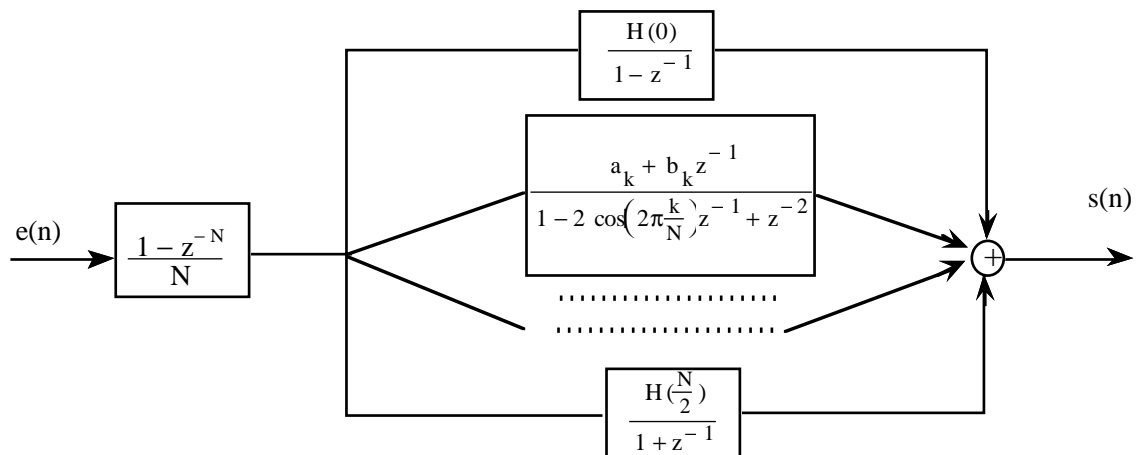


Fig. 70.

## 8.4 Comparaison entre filtres RIF-RII

RIF	RII
<i>Fonction de transfert</i> uniquement des zéros	à la fois des pôles et des zéros
<i>Réponse fréquentielle</i> méthodes de synthèse adaptées aux rép. fréq. arbitraires. Ex: différentiateur	méthodes de synth. adaptées à la synthèse de: passe-bas, p.-bande, p.-haut
<i>Caractéristique de phase</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>• possibilité d'une phase linéaire</li> <li>• décaleurs de phase (passe-tout) impossible</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Complexité de synthèse de filtr. à ph. lin.</li> <li>• possibilité de filtres passe-tout</li> </ul>
<i>Stabilité</i> toujours stable	risque d'instabilité
<i>Complexité</i> Proportionnelle à la taille de la réponse impulsionnelle	pas de relation directe entre la taille de la rép. imp. (infinie)
<i>Structure</i> transversale	structure canonique: mise en cascade de cellules du 1 <sup>er</sup> et du 2 <sup>nd</sup> ordre

# Bibliographie

- [1] Proakis, J.G. and Manolakis, D.G., - *Digital signal processing: principles, algorithms and applications* -, Macmillan, 1996
- [2] M. Bellanger - *Traitement numérique du signal : Théorie et pratique* - Collection technique et scientifique des Télécommunications, Masson, 4ème éd. 1990.
- [3] M. Bellanger - *Synthèse des filtres numériques* - Cnet Enst Masson
- [4] G. Blanchet, J.Prado - *Méthodes numériques pour le traitement du signal. Exemple et programmes* - Masson, 1991.
- [5] R. Boite, H. Leich - *Les filtres numériques : Analyse et synthèse de filtres unidimensionnels* - Masson, 3ème éd. 1990.
- [6] D.F. Elliot - *Handbook of digital signal processing, Engineering applications* - Academic Press, 1987.
- [7] C. Gueguen - *Commande des systèmes discrets et échantillonnés* - Enst.
- [8] R.W. Hamming - *Digital filters* - Prentice Hall signal processing series, 2ème éd. 1983.
- [9] L.B. Jackson - *Digital filters and signal processing* - Kluwer Academic publishers, 2ème éd. 1986.
- [10] M. Kunt - *Traitement numérique des signaux* , Dunod, 3ème éd. 1981.
- [11] B. Liu - *Digital filters and the fast fourier transform* - Halsted Press, 1975.
- [12] A.V. Oppenheim, R.W. Shafer - *Digital signal processing* , Prentice Hall, 1975
- [13] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, I.T. Young - *Signals and systems* - Prentice Hall, 1983.
- [14] Rabiner, Gold - *Theory and application of digital signal processing* , Prentice-Hall.
- [15] W.P. Salman, M.S. Solotareff - *Le filtrage numérique* - Eyrolles, 1982.
- [16] Sevely - *Systèmes linéaires échantillonnés* - Dunod
- [17] Y. Thomas - *Signaux et systèmes linéaires* - Masson, 1992.

- [18] Tretter - *Discrete time signal processing* - Wiley
- [19] A.W.M. van den enden, N.A.M. Verhoeckx - *Traitement numérique du signal : une introduction* - Masson, 1992.