MTS 301 A
Eléments de traitement numérique du signal

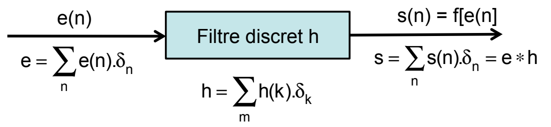
C5 Synthèse des filtres : filtres non récursifs

Plan

- Synthèse des filtres
  - Caractérisation des filtres discrets
  - Synthèse : principe
  - Types de filtres
- Synthèse des filtres NR : méthode de l'échantillonnage en fréquence
  - Cas général
  - Filtres à réponse impulsionnelle réelle
- Synthèse des filtres NR : méthode de la fenêtre
  - Principe
  - Réponse fréquentielle
  - Exemple
- Synthèse des filtres NR : filtres à phase linéaire
  - Définition
  - Filtres réels à phase nulle
  - Filtres réels à phase linéaire

Synthèse des filtres

- Caractérisation des filtres discrets (1)
  - **Filtres stables**
  - par leur réponse fréquentielle pour la facilité d'interprétation



$S(e^p) = TL(s) = TL(e * h) = E(e^p) \, . \, H(e^p)$

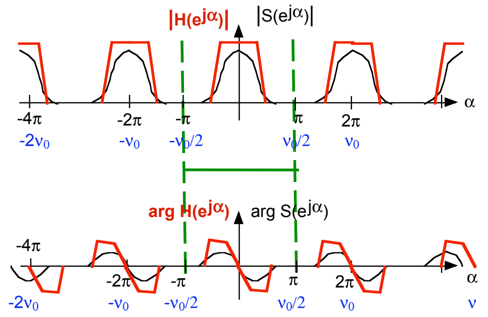
$S(z) = E(z) \, . \, H(z)$ et $S(e^{j\alpha}) = E(e^{j\alpha}) . H(e^{j\alpha})$

Fréquences réelles : $S(e^{j2\pi\varpi T_0}) = E(e^{j2\pi\varpi T_0}) \cdot H(e^{j2\pi\varpi T_0})$

$\boxed{H(e^{j\alpha}) \text{ et } H(e^{j2\pi\varpi T_0}) \text{ sont périodiques (périodes } 2\pi \text{ et } \nu_0 \text{ respectivement)}}$

Synthèse des filtres

- Caractérisation des filtres discrets (2)
  - ✓ $S(e^{j2\pi\varpi T_0}) = E(e^{j2\pi\varpi T_0}) \cdot H(e^{j2\pi\varpi T_0})$ ou $S(e^{j\alpha}) = E(e^{j\alpha}) . H(e^{j\alpha})$

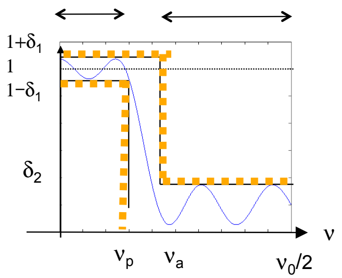


$\boxed{\text{Caractérisation fréquentielle sur } [-\pi,\pi] \text{ ou sur } [-\nu_0/2,\nu_0/2]}$

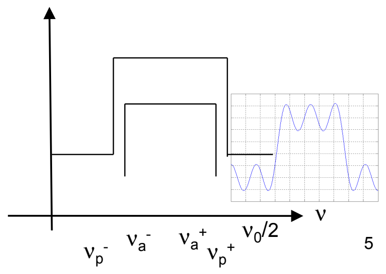
Synthèse des filtres

- Caractérisation des filtres discrets (3)
  - Mêmes types de définition que pour les filtres à temps continu, avec la donnée du gabarit fréquentiel à respecter : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande...

Passe-bas : sélectivité, ondulation en BP, atténuation en BA



Passe-Bande (ou Réjecteur de Bande) : fréquences de coupure basses, hautes, fréquence centrale



Synthèse des filtres

- Synthèse : principe
  - Connaissant les caractéristiques du filtre cherché ($H(e^{j2\pi\varpi T_0})$), déterminer H(z) et en déduire l'équation de filtrage connaissant.

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{M} b_j z^{-j}} \quad \Rightarrow \quad s(k)=\sum_{i=0}^{N} a_i.e(k-i)-\sum_{j=1}^{M} b_j.s(k-j)$$

- Types de filtres
  - habituellement, synthèse de ***filtres causaux*** (traitement en temps réel des signaux ou des données générées), mais aussi filtres **non-causaux** pour des traitements en temps différé, ou de suites discrètes.

$s(k)=\sum_{i=0}^{N} a_i.e(k-i)-\sum_{j=1}^{M} b_j.s(k-j)$: filtres récursifs, réponse impulsionnelle infinie (RII)

$s(k)=\sum_{i=0}^{N} a_i.e(k-i)=\sum_{i=0}^{N} h(i).e(k-i)$: filtres non récursifs, réponse impulsionnelle finie (RIF)

Synthèse des filtres NR
Méthode de l'échantillonnage en fréquence(1)

- Principe
  - On utilise la TFD pour définir les coefficients du filtre

$$h=\sum_{n=0}^{N-1} h(n).\delta_n \quad \Rightarrow \quad H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n).z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k).e^{j\frac{2\pi kn}{N}}\right).z^{-n}$$

$$H(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi kn}{N}}.z^{-n}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\frac{1-e^{j2\pi kn}.z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi k}{N}}.z^{-1}} \quad ;\text{or} \quad e^{j2\pi kn}=1$$

d'où

$$\boxed{H(z)=\frac{1}{N}\left(1-z^{-N}\right).\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\frac{1}{1-e^{j\frac{2\pi k}{N}}.z^{-1}}}$$

Le filtre obtenu a exactement la réponse en fréquence voulue, aux instants d'échantillonnage en fréquence de cette réponse.

Synthèse des filtres NR
Méthode de l'échantillonnage en fréquence(2)

- Cas particulier : h(n) réel

Soit h non causal : $h=\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} h(n).\delta_n$ avec N pair $\Rightarrow$ $H(z)=\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} h(n).z^{-n}$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{N}\left(1-z^{-N}\right).\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} H(k)\frac{1}{1-e^{j\frac{2\pi k}{N}}.z^{-1}} \quad \text{avec} \quad H(k)=H^*(-k)$$

car filtre réel -> réponse fréquentielle paire en module, impaire en phase

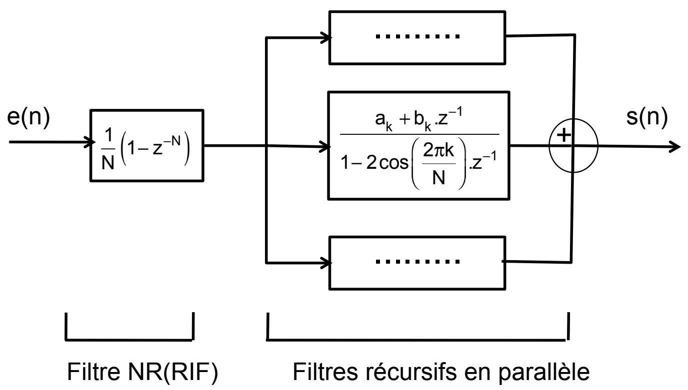
d'où

$$\boxed{H(z)=\frac{1}{N}\left(1-z^{-N}\right)\left[\frac{H(0)}{1-z^{-1}}+\frac{H\left(N/2\right)}{1+z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N/2-1}\frac{a_k+b_k.z^{-1}}{1-2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right).z^{-1}}\right]} \quad \text{avec} \quad a_k, b_k : \text{réels}$$

$$a_k=H(k)+H^*(k) \quad \text{et} \quad b_k=-\left[H^*(k)e^{j\frac{2\pi kn}{N}}+H(k)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}\right]$$

Synthèse des filtres NR
Méthode de l'échantillonnage en fréquence(3)

- Cas particulier : h(n) réel
  - Structure du filtre



Synthèse des filtres NR
Méthode de la fenêtre (1)

- Principe
  - La réponse fréquentielle voulue est $H(e^{j\alpha})$

Or $h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H(e^{j\alpha}).e^{j\alpha n}.d\alpha \Rightarrow$ utilisation directe de l'équation de filtrage

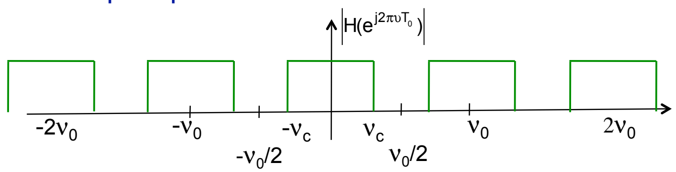
$$s(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e(m).h(k-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e(k-m).h(m)$$

Deux approximations de la réponse

$$\begin{cases} s_a(k) = \sum_{m=-N}^{N} e(k-m).h(m) & : \text{ troncature simple de la réponse impulsionnelle} \\ s_a(k) = \sum_{m=-N}^{N} e(k-m).h(m).w(n) & : \text{ troncature par une fenêtre de pondération } w(n) \text{ (voirTFD)} \end{cases}$$

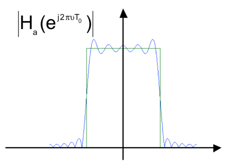
Synthèse des filtres NR
Méthode de la fenêtre (2)

- Exemple : passe-bas idéal



Par la transformée de Fourier inverse : $h(n) = \frac{1}{\upsilon_0}\int H(e^{j2\pi\upsilon T_0}).e^{j2\pi\upsilon n T_0}.d\alpha = \frac{1}{k\pi}\sin 2\pi k\upsilon_c T_0$

Réponse réelle

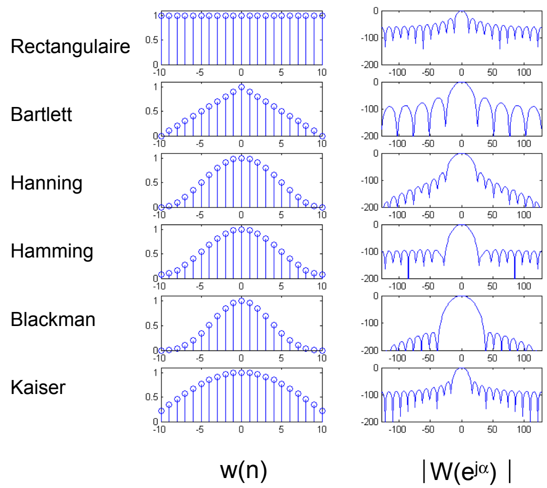


Apparition d'oscillations : phénomène de Gibbs

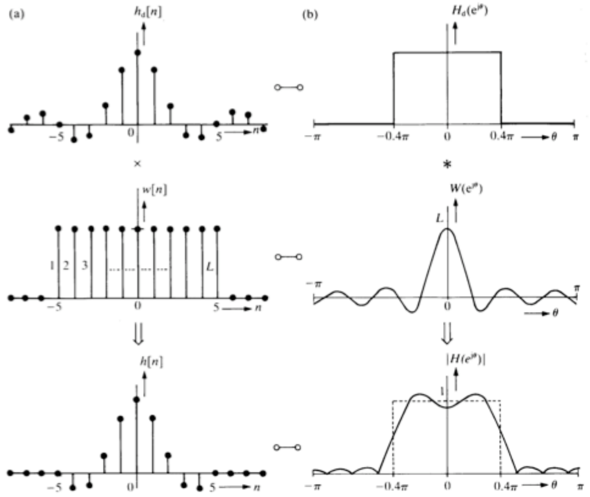
Les fenêtres de pondération utilisées en TFD permettent de limiter ces oscillations

Synthèse des filtres NR
Méthode de la fenêtre (3)

Rappel : fenêtres de pondération usuelles



Synthèse des filtres NR
Méthode de la fenêtre (4) - Exemple



Synthèse des filtres NR
Filtres à phase linéaire(1)

- Définition

Phase linéaire : $\begin{cases} \arg H(e^{j2\pi\upsilon T_0}) = -2\pi.a.\upsilon\ , & a \text{ constante} \\ \arg H(e^{j\alpha}) = -c.\alpha\ , & c \text{ constante} \end{cases}$

- Filtres à phase nulle

Filtre réel h avec une réponse $H(e^{j\alpha})$ voulue.

$$H(e^{j\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jn\alpha} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \left|H(e^{j\alpha})\right| = \left|H(e^{-j\alpha})\right| \\ \arg H(e^{-j\alpha}) = -\arg H(e^{j\alpha}) \end{cases}$$

Le filtre est à phase nulle si $H(e^{j\alpha})$ est réel et positif, ou nul, $\forall\alpha$

$$H(e^{j\alpha}) \text{ réel implique que : } \quad h(n) = h(-n) \Rightarrow H(e^{j\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jn\alpha} = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} h(n)\cos(n\alpha)$$

Synthèse des filtres NR
Filtres à phase linéaire(2)

- Filtres causaux à phase linéaire : principe
  - On considère le filtre réel h, avec h(n) réel, h(n)=h(-n) et $H(e^{j\alpha})$ de phase nulle.
  - Nous approchons cette réponse par le filtre h_a , $H_a(e^{j\alpha})$, en tronquant la réponse impulsionnelle h entre les échantillons –M et +M.

$$H_a(e^{j\alpha}) = \sum_{n=-M}^{+M} h(n)e^{-jn\alpha} \quad \text{ou} \quad H_a(e^{j\alpha}) = \sum_{n=-M}^{+M} h(n).w(n).e^{-jn\alpha}$$

Nous obtenons le filtre causal h_c par translation de h_a de M échantillons à droite (filtres de type I, réponse symétrique/ par rapport à l'axe n = M).

$$h_c = h_a * \delta_M = \sum_{k=0}^{2M} h(k).\delta_k \quad \Rightarrow \quad H_c(e^{j\alpha}) = H_a(e^{j\alpha}).e^{-jM\alpha}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \left|H_c(e^{j\alpha})\right| = \left|H_a(e^{j\alpha})\right| \\ \arg H_c(e^{j\alpha}) = \arg H_a(e^{j\alpha}) - M\alpha = \begin{cases} -M\alpha \\ -M\alpha \pm \pi \end{cases} \end{cases}$$

Filtre avec N=2M+1 coefficients

Synthèse des filtres NR
Filtres à phase linéaire(3)

- Méthode
  - On se fixe une réponse $H(e^{j\alpha})$ de phase nulle et de module pair, pour avoir des coefficients h(n) réels, avec h(n)= h(-n). Le nombre N = 2M+1 d'échantillons pris en compte sera fonction de la qualité de l'approximation voulue.
- Autres solutions
  - avec un nombre d'échantillons N impair : anti- symétrie par rapport à l'axe a = (N-1)/2 (a entier) (filtres de type III)
  - avec un nombre d'échantillons N pair : symétrie par rapport à l'axe a =(N-1)/2 (a non entier) (filtres de type II)
  - avec un nombre d'échantillons N pair : anti-symétrie par rapport à l'axe a =(N-1)/2 (a non entier) (filtres de type IV)

Synthèse des filtres NR
Filtres à phase linéaire(4)

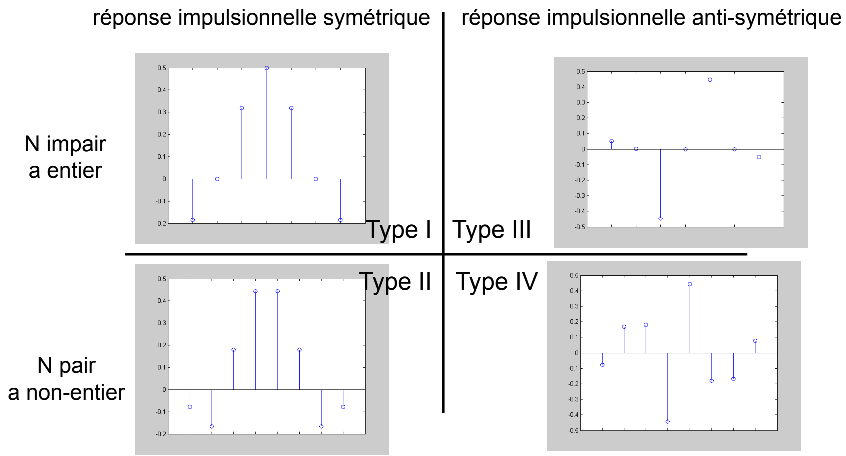
Dans tous les cas : arg $H_c(e^{j\alpha}) = \beta - a.\alpha$, avec $\beta = 0, \pm\pi, \pm\pi/2$, et a constante entière ou non (en fonction de la parité du nombre d'échantillons).

⇨ Temps de propagation de groupe constant

$$\tau_g(\alpha) = \frac{d\left[\arg H(e^{j\alpha})\right]}{d\alpha} = a$$

⇨ la forme du signal est conservée

Synthèse des filtres NR
Filtres à phase linéaire(5)



Synthèse des filtres NR
Filtres à phase linéaire(6)

réponse impulsionnelle symétrique

N impair, a entier — Type I — Tout filtre

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cdot \cos(n\omega)$$

$$a_0 = h\left(\frac{N-1}{2}\right) \qquad a_n = 2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\ n = 1,\dots,\frac{N-1}{2}$$

N pair, a non-entier — Type II — Pas de passe-haut

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} b_n \cdot \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

$$b_n = 2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n = 1,\dots,\frac{N}{2}$$

réponse impulsionnelle anti-symétrique

N impair, a entier — Type III — Pas de passe-bas, passe-haut

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c_n \cdot \sin(n\omega)$$

$$c_n = 2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\ n = 1,\dots,\frac{N-1}{2}$$

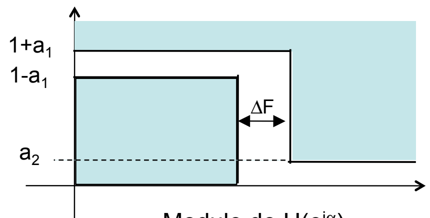
N pair, a non-entier — Type IV — Pas de passe-bas

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} d_n \cdot \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

$$d_n = 2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n = 1,\dots,\frac{N}{2}$$

Synthèse des filtres NR
Filtres à phase linéaire(7)

- **Ordre des filtres RIF : formule empirique**



Module de $H(e^{j\alpha})$

Ordre : $M \approx \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{1}{10.\delta_1.\delta_2}\right)\frac{F_e}{\Delta F}$, F_e : fréquence d'échantillonage

Méthode : prendre les entiers encadrant M comme ordres possibles du filtre, synthétiser le filtre pour avoir les caractéristiques réelles (méthode de Remez par exemple dans Matlab)