MTS 301 A
Eléments de traitement numérique du signal

C 4 : Transformée de Fourier Discrète.

Transformée de Fourier Discrète
Plan

- Définition
- Transformée de Fourier Discrète Inverse
- Application
  - Filtrage
  - Puissance d'un signal discret - Théorème de Parseval
  - Spectre des signaux analogiques
    - ✓ Phénomène de Gibbs - Fenêtres de pondération
- Algorithmes rapides
  - Principe
  - Adaptation des signaux aux algorithmes
- Transformée de Fourier d'un signal discret périodique

Transformée de Fourier Discrète
Définition(1)

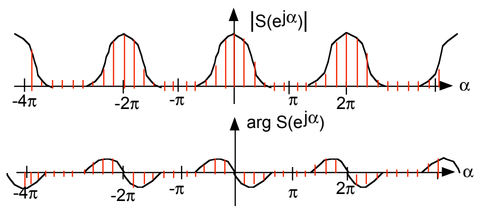
- Rappel : transformée de Fourier d'un signal discret

$$s = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).\delta_n \quad \Rightarrow \quad TF(s) = S(e^{j\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).e^{-j\alpha n}$$

- Cas particulier : signal discret de durée finie (N échantillons)

$$s = \sum_{n=0}^{N-1} s(n).\delta_n \quad \Rightarrow \quad TF(s) = S(e^{j\alpha}) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n).e^{-j\alpha n}$$

Principe : échantillonnage du spectre à la fréquence $\alpha_0 = 2\pi/N$



Transformée de Fourier Discrète
Définition(2)

- Transformée de Fourier Discrète d'un signal discret (TFD)
  - la période d'échantillonnage spectral (domaine fréquentiel) étant $\alpha_0 = 2\pi/N$
  chaque point d'échantillonnage est à une fréquence $\alpha_k = 2\pi k/N$
- La TFD est définie par la suite discrète des échantillons du spectre du signal discret s(n) :

$$S(e^{j\alpha_k}) = S(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n).e^{-j\alpha_k n} = \sum_{n=0}^{N-1} s(n).e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

Notation : $\boxed{S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n).e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = S(e^{j\frac{2\pi k}{N}})}$

Transformée de Fourier Discrète

Transformée inverse

- Connaissant la TFD X(k) du signal x , on peut calculer les valeurs x(n) :

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0,\ldots,N-1 \text{ (signal de durée N)}$$

- Démonstration

$$\text{Soit } Y = \sum_{k=0}^{N-1} X(k).e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l).e^{-j\frac{2\pi lk}{N}}\right).e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1} x(l).\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi lk}{N}}.e^{j\frac{2\pi kn}{N}}\right)$$

$$\text{Donc} \quad Y = \sum_{l=0}^{N-1} x(l).\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k(n-l)}{N}}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k).e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \qquad \text{Or} \quad \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k(n-l)}{N}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq l \\ N & \text{pour } n = l \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k).e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad \text{avec} \quad X(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l).e^{-j\frac{2\pi lk}{N}} = X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})}$$

Transformée de Fourier Discrète

Propriétés (1)

- La TFD est périodique, de période 2π, tout comme la Transformée de Fourier
  - La TFD de $x = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).\delta_n$ comporte le même nombre N d'élément dans une période que le signal S.

- La TFD est linéaire (TF linéaire)

- Translation dans le temps

$$\tau_n(x) = x_{\tau_n} = \sum_k x(k-n)\delta_k = x * \delta_n \quad \Rightarrow \quad TF(x_{\tau_n}) = X_{\tau_n}(e^{j\alpha}) = X(e^{j\alpha}).e^{j\alpha n}$$

$$\text{Pour } \alpha = 2\pi k / N \; : \; X_{\tau_n}(e^{j\alpha}) = \boxed{X_{\tau_n}(k) = X(k).e^{j\frac{2\pi k}{N}n}}$$

Transformée de Fourier Discrète

Propriétés (2)

- TFD de suites ou signaux à période non normalisée ($T_0 \neq$ 1s)
  - Il suffit de remplacer α par $2\pi\nu T_0$. (spectre périodique, de période ν_0 au lieu de 2π).
  - Remarque : on retrouve les mêmes écritures pour la TFD car on échantillonne le spectre à une période (en fréquence) $\upsilon_e = \frac{\upsilon_0}{N}$ avec des échantillons pour les fréquences $\upsilon_{e,k} = \frac{k\upsilon_0}{N}$

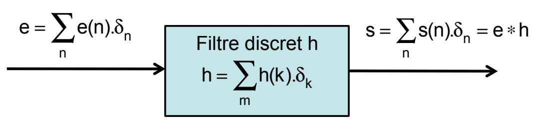
$$X\left(e^{j2\pi\nu T_0}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(k) e^{-jn2\pi\nu T_0}; \quad \text{avec } \upsilon = \upsilon_{e,k} = \frac{k\upsilon_0}{N},$$

$$\text{Nous avons} \quad X\left(e^{j2\pi\frac{k\upsilon_0}{N}T_0}\right) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(k) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad \text{et} \quad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k).e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

- **TFD d'un signal discret périodique = TF du signal**

Transformée de Fourier Discrète

Applications : Filtrage



$$S(e^{j\alpha}) = E(e^{j\alpha}).H(e^{j\alpha}) \quad \Rightarrow \quad S(k) = E(k).H(k) \qquad \text{Mais} \quad \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k).e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \neq s(n)$$

S(k) n'est pas la TFD de s

Explication : le produit de convolution ***s*** entre un signal ***e*** de durée M échantillons et un signal ***h*** de durée N échantillons, a une durée de (M+N–1) échantillons. Pour utiliser la TFD inverse pour calculer s(n), il faut calculer E(k) et H(k) sur (M+N-1) échantillons (en rajoutant des échantillons égaux à 0 -> "zero-padding".

Transformée de Fourier Discrète

Applications : puissance d'un signal discret(1)

- Rappel : puissance du signal discret x(n) : $P=\sum_n \left|x(n)\right|^2$
- Relation de Bessel-Parseval $\sum_n \left|x(n)\right|^2=\int_0^1 \left|X\left(e^{j2\pi\nu}\right)\right|^2 d\nu$
- Cas des signaux de durée finie : utilisation de la TFD

$$P=\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$$

Transformée de Fourier Discrète

Applications : puissance d'un signal discret(2)

- Démonstration (1)

x : signal de durée N échantillons

$$x=\sum_{k=0}^{N-1}x(k).\delta_k \quad \text{avec} \quad x(k)=a_k e^{j\varphi_k},\quad x^*=\sum_{k=0}^{N-1}x^*(k).\delta_k=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{-j\varphi_k}.\delta_k$$

TFD de x : $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}a_k e^{j\varphi_k}e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$

TFD de x* : $\hat{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}a_k e^{-j\varphi_k}e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$

$\boxed{\text{Remarque : } \hat{X}(-k)=X^*(k)}$

Calculons $P=\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1}x(n).x^*(n)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k).e^{j\frac{2\pi kn}{N}}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}\hat{X}(q).e^{j\frac{2\pi qn}{N}}\right)$

Transformée de Fourier Discrète

Applications : puissance d'un signal discret(3)

- Démonstration (2)

$$P=\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\hat{X}(q).\left(\sum_{q=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi(q+k)n}{N}}\right)\right) \qquad \text{or} \qquad \left(\sum_{q=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi(q+k)n}{N}}\right)=\begin{cases}0 & \text{pour } q\neq -k\\ N & \text{pour } q=-k\end{cases}$$

Donc $P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)\hat{X}(-k)$ $\boxed{\text{Rappel : } \hat{X}(-k)=X^*(k)}$

Finalement $\boxed{P=\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2=\int_0^1\left|X\left(e^{j2\pi\nu}\right)\right|^2 d\nu}$

Transformée de Fourier Discrète

Applications : TFD d'un signal discret de durée non finie (1)

- Signaux analogiques échantillonnés : durée d'acquisition limitée ou signaux de durée non finie
- Signaux discrets de durée non finie

Estimation de l'enveloppe de la Transformée de Fourier (du signal discret) par la TFD :

-> il faut tronquer le signal en ne prenant pas tous les échantillons

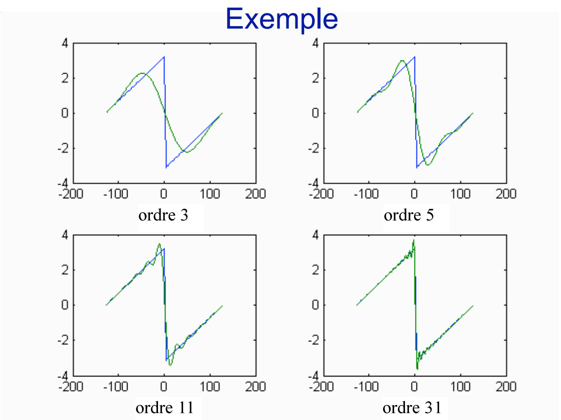
✓ Solution 1 : troncature simple

$$x=\sum_k x(k)\delta_k \quad\Rightarrow\quad \bar{x}=\sum_{k=0}^{N-\&}x(k)\delta_k \text{ (signal causal) ou } \bar{x}=\sum_{k=-N}^{N}x(k)\delta_k \text{ (signal non causal)}$$

Problème : oscillations importantes dans le domaine fréquentiel (***phénomène de Gibbs***)

Transformée de Fourier Discrète

TFD d'un signal discret de durée non finie (2)



En bleu : TF du signal non tronqué, en vert TFD du signal en augmentant le nombre d'échantillons gardés

Transformée de Fourier Discrète

TFD d'un signal discret de durée non finie (3)

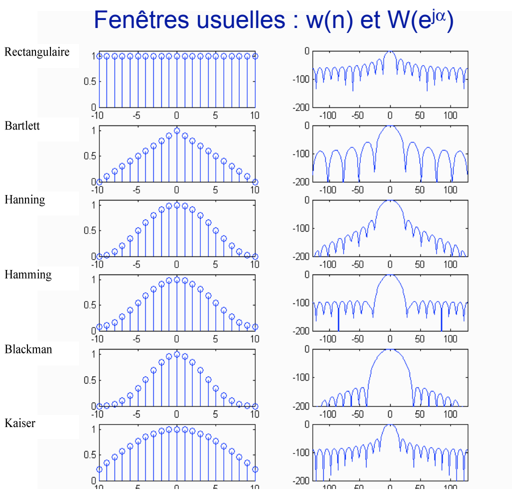
✓ Solution 2 : multiplier par un signal de durée finie atténuant les effets de bord (fenêtres de pondération w(n))

$$x = \sum_k x(k)\delta_k \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k).w(k)\delta_k \text{ (signal causal)}$$

$$\text{ou} \quad \bar{x} = \sum_{k=-N}^{N} x(k).w(k)\delta_k \text{ (signal non causal)}$$

Transformée de Fourier Discrète

TFD d'un signal discret de durée non finie (4)



Transformée de Fourier Discrète

Les algorithmes rapides (TFR)

TFR partagée dans le temps (DIT)
FFT : Fast Fourier Transform

Proposée par Cooley et Tuckey en 1965

Remarque : la TFR est un calcul d'échantillons de la transformée de Fourier, pas une transformée

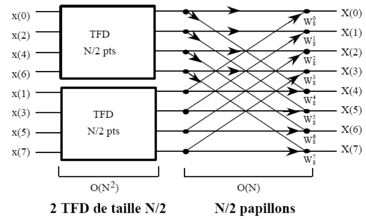
Transformée de Fourier Discrète

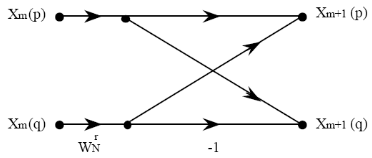
Algorithme de Cooley Tuckey (1)

- On pose : $X(k) = \sum_{l\ \text{pairs}} x(l) W_N^{lk} + \sum_{l\ \text{impairs}} x(l) W_N^{lk}$ avec $W_N^{lk} = e^{j\frac{2\pi kl}{N}}$
- D'où $X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k}$
- Avec $W_N^2 = \left(e^{-\frac{j2\pi}{N}}\right)^2 = e^{-\frac{j2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$
- On obtient $X(k) = X_1(k) + W_{N/2}^k X_2(k)$
- Il faut calculer $X_1(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{nk}$ et $X_2(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^{nk}$
- On utilise la parité $X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_{N/2}^k X_2(k)$

Transformée de Fourier Discrète

Algorithme de Cooley Tuckey (2)





Il ne nécessite que 2 fois le calcul sur N/2 points, donc N/2 multiplications (au lieu de NxN), d'où un gain très important en temps de calcul.

$$\begin{cases} X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^T \cdot X_m(q) \\ X_{m+1}(q) = X_m(p) - W_N^T \cdot X_m(q) \end{cases}$$

Transformée de Fourier Discrète

Algorithme de Cooley Tuckey (3)

- Problème : cet algorithme travaille forcément avec un nombre d'échantillons égal à une puissance de 2

Exemple : 2^8 -> 256, 2^{10} = 1024, etc....

⇨ Nécessité de tronquer les signaux ou de rajouter des zéros

Autres algorithmes :

- Rabiner-Gold
- Winograd (décomposition du nombre d'échantillons sur une base de nombres premiers)