MTS 301 A
Eléments de traitement numérique du signal

Chap 2 : Représentation fréquentielle des signaux et systèmes. Transformée en z.

Plan (1)

- Rappel : transformées de Fourier et Laplace au sens des distributions
- Application
  - Transformée de Fourier d'un signal discret
  - Transformée de Laplace d'une suite discrète
  - Transformées des suites discrètes
  - Réponse fréquentielle d'un filtre discret
- Transformée en z
  - Définition
  - Intérêt de la transformation en Z
  - Fonction de transfert d'un système discret
  - Transformée en Z de l'équation récurrente de filtrage
- Propriété de la transformation en Z
  - Convergence de la transformée en Z
  - Transformée monolatérale
  - Stabilité d'un filtre causal

Plan (2)

- Transformation inverse
  - Développement en série
  - Rappel sur les fonctions holomorphes
  - Application
  - Autre formulation à l'aide des résidus
  - Division polynomiale
- Transformée en Z d'un produit
  - Détermination
  - Puissance d'un signal discret – Théorème de Parseval
- Transformées usuelles
- Exemple

Transformées de Fourier et Laplace au sens des distributions

- Transformée de Fourier d'une distribution T tempérée ou à support compact

-> définie par la fonction $\boxed{T(\nu) = < T_x, e^{-j2\pi\nu x} >}$

- Exemple : TF d'un Dirac

$TF[\delta] =< \delta_x, e^{-j2\pi\nu x} > = 1$ et $TF[\delta_\alpha] =< \delta_a, e^{-j2\pi\nu x} >= e^{-j2\pi\nu a}$

- Transformée de Laplace d'une distribution T

$T \longrightarrow \boxed{TL(T)(p) = <T_x, e^{-px}>}$: fonction de p

avec $p = \sigma + i\omega$ (souvent noté $p = \sigma + j\omega$)

- Exemple : TL d'un Dirac -> $TL[\delta_\alpha] =< \delta_a, e^{-px} >= e^{-pa}$

Application dans les espaces discrets (1)

- Transformée de Fourier d'un signal discret $\boxed{s=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0).\delta_{nT_0}}$

$$TF(s)=TF\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0).\delta_{nT_0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0).TF(\delta_{nT_0})=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0).e^{-j2\pi\upsilon nT_0}=\boxed{S(e^{j2\pi\upsilon T_0})}$$

(en considérant que cette la TF existe, i.e. que la somme converge)

- Transformée de Fourier d'une suite discrète $\boxed{s=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).\delta_n}$

$$TF(s)=TF\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).\delta_n\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).TF(\delta_n)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).e^{-j2\pi\upsilon n}$$

Notation : $\boxed{S(e^{j\alpha})=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).e^{-j\alpha n}=TF(s),\quad \text{avec } \alpha=2\pi\upsilon : \text{fréquence normalisée}}$

Application dans les espaces discrets (2)

- Transformée de Laplace d'un signal discret $\boxed{s=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0).\delta_{nT_0}}$

$$TL(s)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0).TL(\delta_{nT_0})=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0).e^{-pnT_0}=S(e^{pT_0}),\quad p\in\mathbb{C}$$

- Transformée de Laplace d'une suite discrète $\boxed{s=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).\delta_n}$

$$TL(s)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).TL(\delta_n)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).e^{-pn},\quad p\in\mathbb{C}$$

Notation : $\boxed{S(e^{p})=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).e^{-pn}=TL(s)}$

Propriétés de la transformée de Fourier d'un signal discret

- Périodicité

$$\forall k,\ S(e^{j\alpha})=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).e^{-j\alpha n}=S(e^{j(\alpha+2k\pi)})\quad \text{Fonction périodique de période } 2\pi$$

$$\text{Donc } S(e^{j\alpha})=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).e^{-j\alpha n}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n.e^{j\alpha n} : \text{développement en série de Fourier}$$

$$\text{d'où}\quad \boxed{s(n)=C_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int S(e^{j\alpha}).e^{j\alpha n}.d\alpha}$$

Cas particulier : signal échantillonné $x(nT_0)$

$$\alpha=2\pi\upsilon T_0,\ \text{période } \upsilon_0,\quad \text{d'où}\quad x(nT_0)=C_{-n}=\frac{1}{\upsilon_0}\int S(e^{j2\pi\upsilon T_0}).e^{j2\pi\upsilon nT_0}.d\alpha$$

Réponse fréquentielle d'un filtre discret

$e(n)$ → Système discret → $s(n) = f[e(n)]$

$$e=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e(n).\delta_n \qquad s=\sum_n s(n).\delta_n=\sum_n\left[\sum_k e(k)h(n-k)\right].\delta_n$$

Soit l'entrée e, avec $e(k) = e^{jk\alpha}$

$$s=\sum_n\left[\sum_k e^{jk\alpha}h(n-k)\right].\delta_n=\sum_n e^{jn\alpha}\left[\sum_k e^{-j(n-k)\alpha}h(n-k)\right].\delta_n$$

$$=\sum_n e^{jn\alpha}\left[\sum_m e^{-jm\alpha}h(m)\right].\delta_n=\sum_n e^{jn\alpha}H\left(e^{j\alpha}\right).\delta_n=H\left(e^{j\alpha}\right).\sum_n e^{jn\alpha}.\delta_n$$

Finalement, pour $e(k) = e^{jk\alpha}$ $\boxed{s=H\left(e^{j\alpha}\right).e}$ avec $H(e^{j\alpha})$: transformée de Fourier de h

Application : cas des systèmes à réponse réelle

Transformée en z

Définition

Considérons la transformée de Laplace d'un signal discret

$$S(e^p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).e^{-pn}, \quad p \in \mathbb{C}$$

On pose z = e^p

S(e^p) s'écrit alors : $S(e^p) = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).z^{-n} = S(z)}$ **Transformée en z de s (ou s(n))**

Exemple $\quad TZ(\delta_n) = TL(\delta_n)_{z=e^p} = <\delta_n, e^{-px}> = e^{-pn} = z^{-n}$

- **Propriété importante**
  - TZ(f $*$ g) = F(z).G(z) (c'est la transformée de Laplace)
  - Application : translaté par n de x : $\tau_n(x) = \sum_k x(k-n)\delta_k = x*\delta_n$

$$\boxed{TZ(\tau_n(x)) = TZ(x*\delta_n) = X(z).TZ(\delta_n) = X(z).z^{-n}}$$

Transformée en z

Fonction de transfert d'un filtre discret (1)

e(n) → **Filtre discret h** → s(n) = f[e(n]

$e = \sum_n e(n).\delta_n \qquad h = \sum_m h(k).\delta_k \qquad s = \sum_n s(n).\delta_n = e*h$

S(e^p) = TL(s) = TL(e $*$ h) = E(e^p) . H(e^p)

Donc S(z) = E(z) . H(z)

H(z) : fonction de transfert (en z) du filtre = transformée en z de h

H(z) = $\sum h(k).z^{-k}$

Remarque : si H(e$^{j\alpha}$) existe, S(e$^{j\alpha}$) = E(e$^{j\alpha}$)$\cdot$ H(e$^{j\alpha}$)

Transformée en z

Fonction de transfert d'un filtre discret (2)

Détermination de H(z) à partir de l'équation de filtrage

$$s = \sum_{i=0}^{N} a_i\tau_i(e) - \sum_{j=1}^{M} b_j\tau_j(s) \quad \text{avec} \quad \tau_i(e) = e*\delta_i$$

H(z) : transformée en z de la réponse impulsionnelle -> e = δ

D'où $\quad s = h = \sum_{i=0}^{N} a_i\delta_i - \sum_{j=1}^{M} b_j.h*\delta_j = \sum_{i=0}^{N} a_i\delta_i - h*\sum_{j=1}^{M} b_j.\delta_j \quad (1)$

TZ(1) ⇒ $H(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} - H(z)*\sum_{j=1}^{M} b_j z^{-j}$ ⇒ $\boxed{H(z) = \dfrac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{M} b_j z^{-j}}}$

Transformée en z

Fonction de transfert d'un filtre discret (3)

- Réponse à une entrée quelconque

$$s = \sum_{i=0}^{N} a_i\tau_i(e) - \sum_{j=1}^{M} b_j\tau_j(s) \Rightarrow s = e*\sum_{i=0}^{N} a_i\delta_i - s*\sum_{j=1}^{M} b_j.\delta_j$$

D'où $\quad S(z) = E(z)\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} - S(z)*\sum_{j=1}^{M} b_j z^{-j}$ ⇒ $\boxed{S(z) = E(z).\dfrac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{M} b_j z^{-j}} = E(z).H(z)}$

- Simplification du formalisme

$$TZ(\tau_n(x)) = TZ\left(\sum_k x(k-n)\delta_k\right) = TZ(x*\delta_n) = X(z).z^{-n}$$

Notation ⇒ $\boxed{TZ(x(n-k)) = X(z).z^{-n}}$

Transformée en z

Fonction de transfert d'un filtre discret (4)

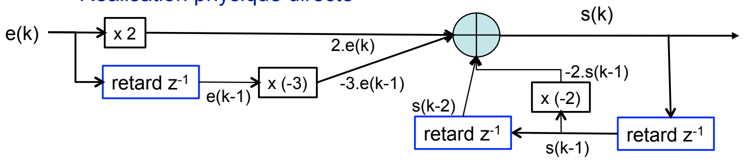
- Exemple filtre du 2ème ordre
  - Equation de filtrage

$s(n) = 2.e(k) – 3.e(k-1) + s(k-1) – 2.s(k-2)$

$S(z) = 2.E(z) – 3.E(z).z^{-1} + S(z).z^{-1} – 2.S(z).z^{-2}$

D'où $\boxed{H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1-3z^{-1}}{1-z^{-1}+2z^{-2}}}$

- Réalisation physique directe



Transformée en z

Propriétés (1)

- Transformée monolatérale

✓ Définition : transformée d'un signal causal

$$x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} x(n).\delta_n \quad \Rightarrow \quad X(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} x(n).z^{-n}$$

✓ Théorème de la valeur initiale

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

✓ Théorème de la valeur finale

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1}).X(z)$$

Transformée en z

Propriétés (2)

- Convergence de la transformée en z

✓ Rappel : convergence de séries entières

soit la série entière S(z) : $S(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n.z^n \quad \text{et} \quad S_i(z) = \sum_{n=0}^{n=i} a_n.z^n$

La série est convergente pour $z \in D$ si et seulement si :

$$\lim_{i\to\infty} \left|S(z) - S_i(z)\right| = 0 \quad \forall z \in D$$

Elle est absolument convergente si la série $|a_n . z^n|$ converge.

✓ Lemme d'Abel

Si S(z) converge en $z = z_0$, alors elle est convergente et absolument convergente dans le disque $|z| < |z_0|$, et converge vers une fonction H(z) holomorphe dans ce disque.

$$\boxed{\text{Rayon de convergence : } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}}$$

Transformée en z

Propriétés (3)

- Application à la transformée en z

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{0} h(n)z^{-n}}_{H^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} h(n)z^{-n}}_{H^+(z)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} h(-n)z^{n}}_{H^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} h(n)z^{-n}}_{H^+(z)}$$

$H^-(z)$: converge pour : $|z| < R_2$

$H^+(z)$: converge pour $|z^{-1}| < \frac{1}{R_1} \Leftrightarrow R_1 < |z|$

Si $R_1 < R_2$, la transformée en Z existe dans une couronne de convergence donnée par $R_1 < |z| < R_2$ et vaut H(z).

Si $R_1 > R_2$, la transformée en Z n'existe pas.

Transformée en z

Propriétés (4)

• Cas particulier de la transformée en z monolatérale

Considérons la série $x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} x(n).\delta_n$.

Pour IzI > r , sa transformée en z converge vers une fonction $X(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} x(n).z^{-n}$ holomorphe dans ce domaine IzI > r.

Soient z_i les pôles de H(z), et z_0 le pôle tel que $|z_0| > |z_i|$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{n=+\infty} x(n).z^{-n}$ converge et est égale à X(z) $\forall$ $|z| > |z_0|$

Transformée en z

Application : stabilité d'un système causal

• Rappel : un filtre discret causal de réponse impulsionnelle h(n) est stable si et seulement si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < M$$

• Théorème : un filtre discret causal est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert en *z* sont à l'intérieur du cercle unité.

• Condition suffisante

hypothèse : les pôles de H(z) sont à l'intérieur du cercle unité.

H(z) est donc holomorphe pour IzI ≥ 1 et développable en série convergente et absolument convergente dans ce domaine, ce qui est vrai en particulier pour z = 1.

Donc $H(1) = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|.1^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|$ est bornée et le système est stable.

•

Transformée en z

Application : stabilité d'un système causal

• Condition nécessaire :

hypothèse : *H(z)* a un pôle en dehors du cercle unité (au sens large, y compris un pôle sur le cercle unité). Donc z = 1 est en dehors du domaine de convergence de la série, et :

$$H(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n).1^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) > M \quad \forall M$$

• Or $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\right| < \sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|$, donc $\forall M$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| > M$: système instable

Un filtre discret causal est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert en *z* sont à l'intérieur du cercle unité.

Remarque importante : seuls les filtres stables ont une réponse fréquentielle

Transformée en z

Transformée en z inverse (1)

• Objectif : déterminer x(n) à partir de X(z) = Σx(n).z^{-n}

Exemple : sortie d'un filtre S(z) = E(z) . H(z) -> s(n) ?

• Méthodes :

✓ Développement en série de X(z)

✓ Division polynomiale (cas où X(z) est une fraction rationnelle en z, typiquement une fonction de transfert à partir d'une équation de filtrage

✓ Intégration en utilisant les développements en séries entières des fonctions holomorphes

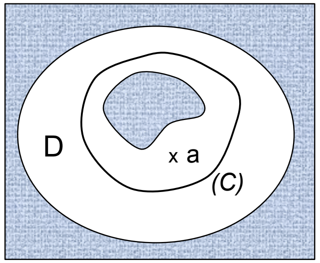
• Exemple :

$$X(z) = (1+z^{-1})e^{z^{-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}(n+1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n}, \quad \text{d'où} \quad x(n) = \frac{n+1}{n}, \; n \geq 0$$

Transformée en z

Transformée en z inverse (2)

- Rappel sur les fonctions holomorphes
  - Soit f(z) (fonction holomorphe), un domaine *D*, un point *a* appartenant ou non à D. Soit (*C*) un contour fermé entourant *a* et appartenant à *D*.



f(z) est alors développable en série de Laurent autour de "a".

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n$$

$$\text{avec } A_n = \frac{1}{2\pi} \oint_{(c)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du$$

Transformée en z

Transformée en z inverse (3)

• On considère la série $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n).z^{-n}$ qui converge vers la fonction X(z).

Pour $R_1 < |z| < R_2$ (domaine D) , X(z) est holomorphe dans ce domaine D et développable en série de Laurent autour de z = 0. Ce développement est unique :

$$X(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^m \quad \text{avec} \quad a_m = \frac{1}{2\pi} \oint_{(C)} \frac{X(z)}{z^{m+1}} dz$$

Changeons m en –n :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n).z^{-n}$$

$$\boxed{\text{D'où} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \oint_{(C)} X(z) z^{n-1} dz}$$

(C) : contour fermé dans D, englobant z=0 $R_1 < |z| < R_2$

Cette intégrale peut se calculer par la méthode des résidus

Transformée en z

Transformée en z inverse (4)

- Rappel

Développement de f(z) autour d'un point a_p :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-a_p)^n \text{ avec } A_n = \frac{1}{2\pi} \oint_{(c)} \frac{f(u)}{(u-a_p)^{n+1}} du$$

Le coefficient A_{-1} est appelé Résidu de f(z) en a_p : $\mathrm{Res}[f(z)]_{z=a_p}$

- Application : f(z) fonction holomorphe dans un domaine D, sauf en un nombre fini de points a_i, (C) un contour englobant ces points a_i, alors :

$$\oint_{(C)} f(z) dz = 2\pi j.\sum_{p=1}^{N} \mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=a_i} \qquad \text{Or} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \oint_{(C)} X(z) z^{n-1} dz$$

Nous en déduisons : $\boxed{x(n) = \sum_{\substack{\text{pôles de } z^{n-1}.X(z) \\ \text{inclus dans (C)}}} \mathrm{Res}\left[z^{n-1} X(z)\right]}$

Transformée en z

Transformée en z inverse (5)

- **Formules :**
  - Si *a* est un pôle simple de *f(z)* :

$$\mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=a} = \lim_{z \to a} \left[(z-a) f(z)\right]$$

  - Si *a* est un pôle d'ordre N :

$$\mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=a} = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to a} \left[\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} (z-a)^N f(z)\right]$$

  - Si $f(z) = \dfrac{P(z)}{(z-a)^n.Q(z)}$ alors $\mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=a} = \dfrac{1}{(N-1)!} \left[\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right]_{z=a}^{(N-1)}$

  - pour N=1 $\mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=a} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$

Transformée en z

Puissance d'un signal discret (6)

- La puissance du signal discret x(n) est par définition :

(si la somme converge) $P = \sum_n |x(n)|^2$

- Relation de Bessel-Parseval pour des signaux discrets

$$\sum_n |x(n)|^2 = \int_0^1 \left|X\left(e^{j2\pi\nu}\right)\right|^2 d\nu$$

Transformée en z

Transformées usuelles (7)

- Impulsion unité $\delta \Rightarrow Z[\delta] = 1$
- Echelon unité $u = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k \quad \Rightarrow \quad U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ pour $|z| > 1$
- Rampe unité

$$r = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \delta_k \quad \Rightarrow \quad R(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot z^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad \text{pour } |z| > 1$$

- $e(k) = a^k u(k) \Rightarrow E(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ pour $|z| > a$