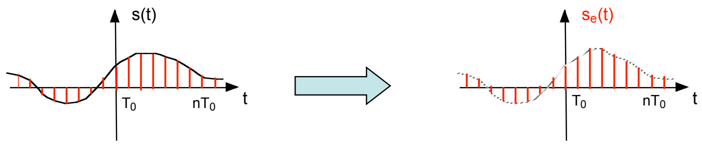
MTS 301 A
Eléments de traitement numérique du signal

C1 : introduction, échantillonnage, signaux et système discrets

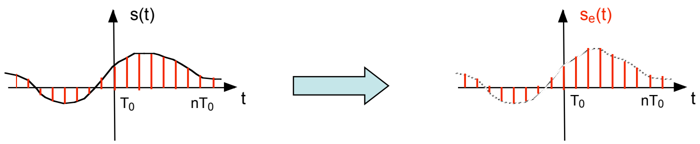
Echantillonnage d'un signal (1)



$$s_e(t) = \begin{cases} s(nT_0) & \text{pourt} = nT_0 \\ 0 & \text{pourt} \neq nT_0 \end{cases} \Longrightarrow s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0)\delta(t-nT_0)$$

$\delta(t-nT_0)$: "fonction / signal" de Dirac $\quad \delta(t-nT_0) = \begin{cases} 1 & \text{pourt} = nT_0 \\ 0 & \text{pourt} \neq nT_0 \end{cases}$

Echantillonnage d'un signal (2)



$$s_e(t) = \begin{cases} s(nT_0) & \text{pourt} = nT_0 \\ 0 & \text{pourt} \neq nT_0 \end{cases} \Longrightarrow s_e = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0)\delta_{nT_0}$$

avec δ_{nT_0} : distribution de Dirac $\quad <\delta_{nT_0}, \varphi> = \varphi(nT_0)$

Echantillonnage d'un signal (3)
Spectre du signal échantillonné

Rappel : s(t) étant une fonction localement sommable, la distribution s définie par $<s,\varphi> = \int s(t).\varphi(t)dt$ existe.

$$\boxed{\text{Propriété : } \quad s.\delta_{nT_0} = s(nT_0).\delta_{nT_0}}$$

$$s_e = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0)\delta_{nT_0} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s.\delta_{nT_0} = s.\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{nT_0}$$

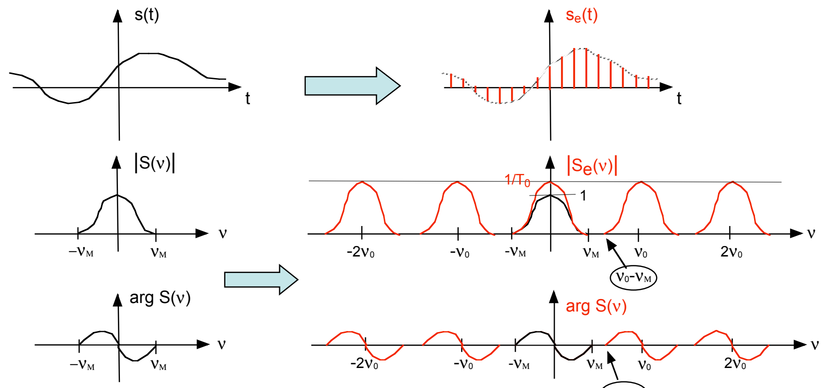
D'où $\quad TF(s_e) = TF\left(s.\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta_{nT_0}\right) = TF(s) * TF\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta_{nT_0}\right)$

Soit $\quad TF(s_e) = TF(s) * \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta_{n\upsilon_0} = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\tau_{n\upsilon_0}TF(s)$

$$\boxed{\text{Du point de vue fonction : } \quad S_e(\upsilon) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} S(\upsilon - n\upsilon_0)}$$

Echantillonnage d'un signal (4)

Signaux à bande limitée (spectre borné)



Echantillonnage d'un signal (5)

Limitations

Théorème de Shannon : il n'y a pas de perte d'information à la condition que :

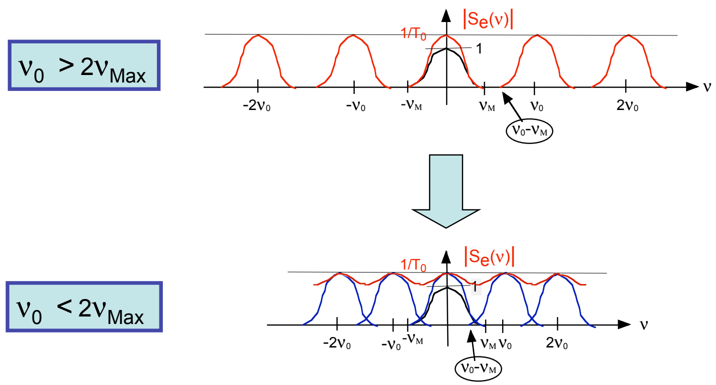
$$\boxed{\nu_0 \geq 2\nu_{Max} \text{ (en pratique : } \nu_0 > 2\nu_{Max})}$$

$\nu_0 = 2\nu_{Max}$: fréquence de Nyquist

Dans le cas où $\nu_0 \leq 2\nu_{Max}$, il y a interférence entre les réplications périodiques du spectre du signal analogique : c'est le repliement de spectre ou *aliasing* en anglais

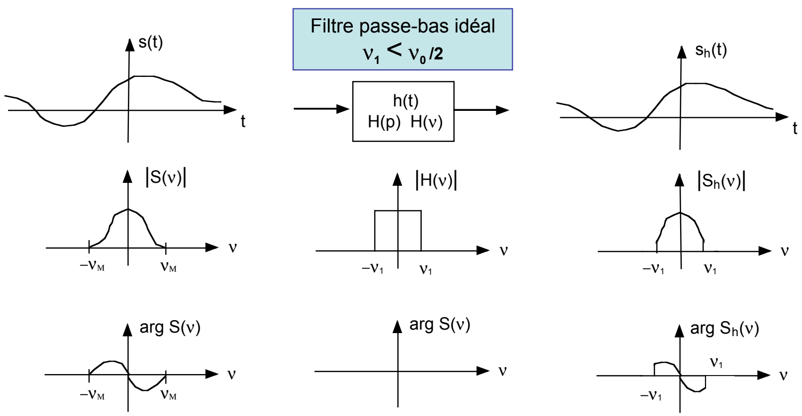
Echantillonnage d'un signal (6)

Repliement de spectre



Echantillonnage d'un signal (7)

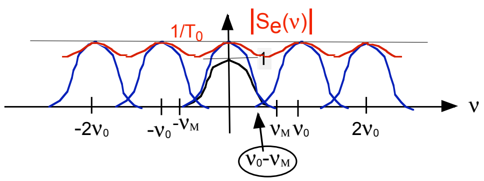
Filtre anti-repliement



Echantillonnage d'un signal (8)

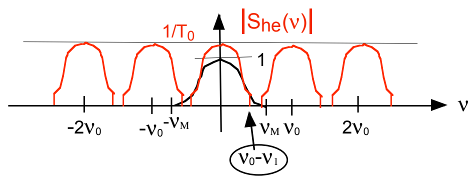
Filtre anti-repliement

Sans filtre anti-repliement

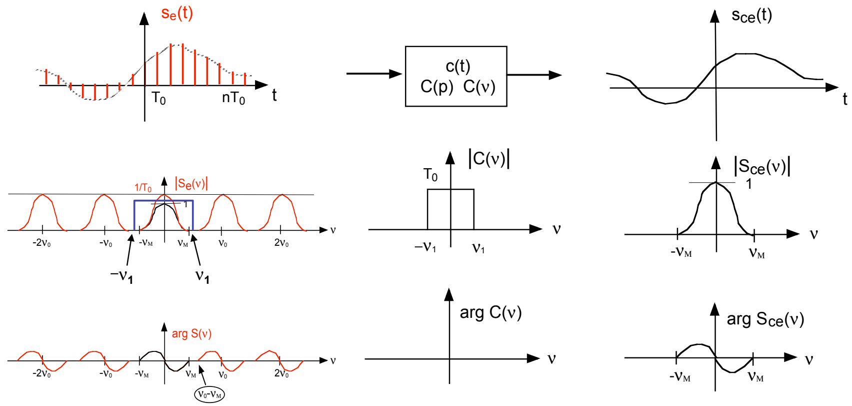


Avec filtre anti-repliement h(t)

Problème : perte d'information !



Reconstruction du signal à temps continu (1)



Reconstruction du signal à temps continu (2)

Filtre passe bas idéal $\quad C(\nu) = \begin{cases} T_0 & \text{si } |\nu| \le \nu_1 \\ 0 & \text{si } |\nu| > \nu_1 \end{cases}$

Filtrage $\quad S(\nu) = C(\nu)\cdot S_e(\nu) \quad \Rightarrow \quad s = TF^{-1}\left[S_e(\nu)\cdot C(\nu)\right] = s_e * c$

Soit : $\quad s = \sum_n s(nT_0)\delta_{nT_0} * c = \sum_n s(nT_0)\cdot \tau_{nT_0}[c]$

$\boxed{\tau_{nT_0}[c] : \text{distribution définie par la fonction } c(t - nT_0)}$

or : $\quad TF^{-1}\left[C(\nu)\right] = c(t) = \left(\frac{T_0}{\pi t}\right)\sin(2\pi\nu_1 t) = 2\nu_1 T_0 . \operatorname{sinc}(2\pi\nu_1 t)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s(t) = \frac{T_0}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0)\frac{\sin 2\pi\nu_1 (t - nT_0)}{t - nT_0}}$$

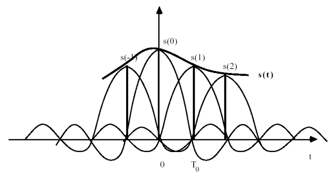
Reconstruction du signal à temps continu (3)

En prenant exactement $\quad \nu_1 = \frac{\nu_0}{2} = \frac{1}{2T_0}$

Nous obtenons : $\quad \boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0)\frac{\sin\frac{\pi}{T_0}(t - nT_0)}{\frac{\pi}{T_0}(t - nT_0)}}$

Formule de l'interpolation idéale

C'est une reconstruction par addition de sinus cardinaux

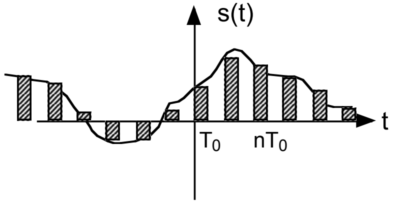


Signaux numériques

De la théorie à la pratique(1)

- Mesure du signal échantillonné

En utilisant un convertisseur analogique numérique (CAN). Utilisation d'échantillonneurs-bloqueurs ou d'échantillonneurs moyenneurs



Mesure -> quantification avec une erreur de quantification

Signal échantillonné ET mesuré -> **signal numérique**

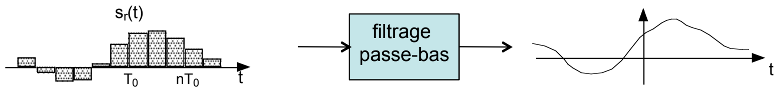
Signaux numériques

De la théorie à la pratique(1)

- Reconstruction du signal analogique

(conversion numérique analogique : CNA)

- Utilisation de CNA bloqueurs, suivi d'un filtrage passe-bas



- Ou utilisation de CNA interpolateurs, toujours suivis d'un filtrage passe-bas (signaux continus reconstruits par interpolation entre les échantillons)

Signaux numériques

De la théorie à la pratique (2)

Chaine de traitement numérique d'un signal analogique (signal à temps continu)

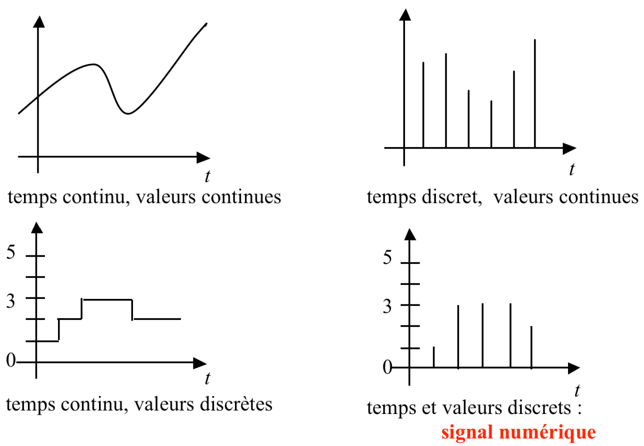
s(t) → Filtre anti-repliement → CAN → Traitement → CNA → Filtre passe-bas (lissage)

Cadre général : signaux discrets et systèmes de traitement de signaux discrets

Signaux et systèmes discrets

- Signaux discrets
  - Classification des signaux
  - Rappel sur la représentation des signaux discrets
- Systèmes linéaires stationnaires continus discrets
  - Définition
  - Réponse impulsionnelle
- Produit de convolution discret
  - Réponse à l'impulsion unité (ou de Dirac)
  - Réponse à une entrée quelconque
  - Causalité
  - Équation aux différences finies
- Stabilité des filtres discrets

Classification des signaux



Signaux discrets

- Obtenus par échantillonnage d'un signal à temps continu

$$s_e = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_0)\delta_{nT_0} = s.\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{nT_0}$$

- Echantillonnage non régulier
- Suite discrète de valeurs (numériques)

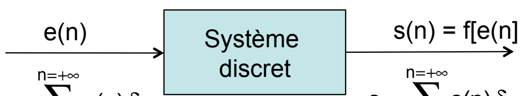
Coefficient

Représentation générale (T_0=1s) $$s = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).\delta_n$$

Remarque : représentation "fonction" par une fonction discrète s(n) et le "signal de Dirac" $$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} s(k)\,\delta(n-k)$$

Systèmes de traitement
Les filtres à temps discret

Nous considérons des systèmes ***linéaires, continus, stationnaires***, fonctionnant à temps discret, ou plus généralement traitant des signaux discrets/numériques



$$e = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e(n).\delta_n \qquad s = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).\delta_n$$

Les filtres à temps discret
Définition espace des fonctions

- La sortie est représentée par une fonctionnelle f :
  s(k) = f[e(k)]

✓ Linéarité : on considère deux entrées $e_1(k)$ et $e_2(k)$

avec $s_1(k) = f\left[e_1(k)\right]$ et $s_2(k) = f\left[e_2(k)\right]$

Le système est linéaire si : $s(k) = f\left[\lambda_1 e_1(k) + \lambda_2 e_2(k)\right] = \lambda_1 s_1(k) + \lambda_2 s_2(k)$

✓ Continuité : le système est continu si

$e(k) = \lim_{n\to+\infty} e_n(k) \quad \forall k$ alors $s(k) = f\left[e(k)\right] = f\left[\lim_{n\to+\infty} e_n(k)\right] = \lim_{n\to+\infty} s_n(k) \quad \forall k$

✓ Stationnarité : e(n-k) : signal e(n) retardé de k échantillons

g(n-k) = f[e(n-k)] = s(n-k)

Les filtres à temps discret
Définition espace des distributions (1)

- L'entrée étant $e = \sum_k e(k)\delta_k$ la sortie s a pour expression :

$$s = \sum_k s(k)\delta_k = \sum_k f\left[e(k)\right]\delta_k$$

- On définit l'application F, représentant le fonctionnement du système dans l'espace des distributions par : $s = F(e) = \sum_k s(k)\delta_k = \sum_k f\left[e(k)\right]\delta_k$

Cette application est linéaire, continue, permutable avec les translations

✓ Linéarité : on considère deux entrées e_1 et e_2

$$s = F(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = \sum_k f\left[\lambda_1 e_1(k) + \lambda_2 e_2(k)\right].\delta_k = \sum_k \left[\lambda_1 f[e_1(k)] + \lambda_2 f[e_2(k)]\right].\delta_k$$

$$= \lambda_1 \sum_k f[e_1(k)].\delta_k + \lambda_2 \sum_k f[e_2(k)[.\delta_k = \lambda_1 F(e_1) + \lambda_2 F(e_2) = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$$

Les filtres à temps discret
Définition espace des distributions (2)

✓ Continuité : $F(e) = F\left[\lim_{n\to+\infty} e_n(k)\right] = \lim_{n\to+\infty} F\left[e_n(k)\right]$

✓ Permutabilité avec les translations :

Soit $\tau_n(e) = \sum_k e(k-n)\delta_k$: translaté par n de e

Alors $F\left[\tau_n(e)\right] = \sum_k f\left[e(k-n)\right]\delta_k = \sum_k s(k-n)\delta_k = \tau_n(s)$

Conclusion : F est une application de type filtre

Donc F(T*U) = F(T) *U=T*F(U)

Les filtres à temps discret
Réponse d'un filtre discret (1)

F est une application de type filtre : F(T*U) = F(T) *U=T*F(U)

Prenons T = e, entrée du système, et U = δ (impulsion de Dirac)

La sortie s s'écrit : s = F(e) = F(e * δ) = e * F(δ)

Soit finalement : s = e * F(δ)

Avec F(δ) : invariant du système -> réponse impulsionnelle

Notation : $h = F(\delta) = \sum_k h(k).\delta_k$

h(k) : réponse impulsionnelle (représentation par fonctions)

Le système est totalement défini par sa réponse impulsionnelle h ou h(k)

Les filtres à temps discret
Réponse d'un filtre discret (2)

✓ **Produit de convolution discret**

Nous avons s = e * F(δ) = e * h, avec :

$e = \sum_k e(k)\delta_k \qquad h = F(\delta) = \sum_l h(l).\delta_l \qquad s = \sum_n s(n)\delta_n$

D'où $s = \sum_n s(n)\delta_n = (\sum_k e(k)\delta_k) * (\sum_l h(l).\delta_l) = \sum_k \sum_l e(k).h(l).\delta_{k+l}$

En posant k + l = n, nous obtenons :

$$s = \sum_n [\sum_k e(k)h(n-k)].\delta_n = \sum_n s(n).\delta_n$$

d'où $s(n) = \sum_k e(k)h(n-k)$: **produit de convolution discret**

Remarque : produit commutatif : $s(n) = \sum_k e(k)h(n-k) = \sum_k e(n-k)h(k)$

Les filtres à temps discret

Réponse d'un filtre discret (3)

✓ **Equation de filtrage**

Aussi appelée "équation aux différences finies".

$$s(k) = \sum_{i=0}^{N} a_i e(k-i) - \sum_{j=1}^{M} b_j s(k-j)$$ Formalisme fonctions

$$s = \sum_{i=0}^{N} a_i \tau_i(e) - \sum_{j=1}^{M} b_j \tau_j(s) \quad \text{avec} \quad \tau_i(e) = e * \delta_i$$ Formalisme distributions

De nombreux systèmes peuvent être décrits par ce type de relations entrée-sortie (linéaires, continues, stationnaires)

✓ **Définitions**

- Filtre non récursif : $b_j = 0 \ \forall j$
- Filtre récursif : $\exists j$, tel que $b_j \neq 0$

Les filtres à temps discret

Propriétés des filtres discrets

✓ **Filtres causaux :** la réponse impulsionnelle h est causale

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} h(k).\delta_k$$

✓ **Filtres non récursifs :** ils sont à réponse impulsionnelle finie (filtres RIF ou FIR)

$$s(k) = \sum_{i=0}^{N} a_i e(k-i) \quad \Rightarrow \quad h(k) = a_k \ , k \in [0,N]$$

✓ **Filtres récursifs :** à réponse impulsionnelle infinie (filtres RII ou IIR)

✓ Les filtres fonctionnant en temps réel doivent être causaux

Les filtres à temps discret

Stabilité des filtres discrets

➢ Définition :
Un filtre discret est stable si toute entrée bornée en amplitude produit une sortie bornée en amplitude

➢ Théorème : un filtre discret est stable si et seulement si $\sum_n |h(n)| < \infty$

➢ Démonstration

- *Condition suffisante* :

Soit $|e(n)| < M \quad \forall n, \quad |s(n)| = \left|\sum_k e(n-k)h(k)\right| \leq \sum_k |e(n-k)||h(k)| \leq M \sum_k |h(k)|$

- *Condition nécessaire* :

Soit $e(n) = \text{sign}[h(-n)] \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad h(-n) > 0 \\ -1 & \text{pour} \quad h(-n) > 0 \end{cases}$

$s(n) = \sum_k e(n-k)h(k)$, donc $\quad s(0) = \sum_k e(-k)h(k) = \sum_k |h(k)|$ $\boxed{: s(0) \text{ borné si } \sum_k |h(k)| < M}$

Quelques définitions

- Signal discret à énergie E finie

$s = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(n).\delta_n \qquad \boxed{E \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(n)|^2}$ existe

- Signal discret à puissance moyenne finie

$$\boxed{P \triangleq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |s(n)|^2}$$

- Produit de corrélation

Soient les signaux $s_1 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s_1(n).\delta_n$ et $s_2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s_2(n).\delta_n$

$\boxed{\Gamma(k) = \sum_n s_1(n) s_2(n-k)}$ (convolution : $s_1 * s_2 = f \to f(k) = \sum_n s_1(n) s_2(k-n)$)